2017 年度 A セメスター　学術フロンティア講義
「現代の数学 ― その源泉とフロンティア ―」

2017 年 9 月 27 日（説明日）、**11 月 8 日**、**12 月 6 日**

「負曲率の世界」

担当　坪　井　　俊

1　平面幾何と曲面上の幾何学

1.1　幾何とは

幾何は、「点の配置を研究する。それを通して空間を研究する。」数学の分野である。「ユークリッドの原論」は点、直線、平面の配置について研究し、ユークリッド空間の性質を明らかにした。「球面上の幾何」は 3 次元ユークリッド空間の幾何の絶好の応用問題である。大円が球面上の測地線を与えている。

1.2　曲線

実数直線の区間から平面あるいは空間への写像を曲線という。$\overrightarrow{c} : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}^2$ (or $\mathbf{R}^3$). 線分（直線）は $\overrightarrow{c}(t) = \overrightarrow{a} + t\overrightarrow{v}$ のように与えられる。線分の長さは $\|\overrightarrow{v}\|$ で、$\overrightarrow{c}(1)$, $\overrightarrow{c}(0)$ の距離 $d(\overrightarrow{c}(1), \overrightarrow{c}(0)) = \|\overrightarrow{c}(1) - \overrightarrow{c}(0)\|$ に等しい。

曲線の長さは, $1 = t_1 < t_1 < \cdots < t_{m-1} = t_m = 1$ のような分割を用いて、

$$\mathrm{length}(\overrightarrow{c}) = \lim_{\mathrm{mesh}\to 0} \sum_{k=1}^{m} \|\overrightarrow{c}(t_k) - \overrightarrow{c}(t_{k-1})\| = \max \sum_{k=1}^{m} \|\overrightarrow{c}(t_{k+1}) - \overrightarrow{c}(t_k)\|$$

で与えられる。

$\overrightarrow{c}(t)$（の各成分）が連続微分可能であれば、

$$\mathrm{length}(\overrightarrow{c}) = \int_0^1 \|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{c}}{\mathrm{d}t}\|\mathrm{d}t$$

である。

ユークリッド空間の 2 点を結ぶ曲線の中で長さが最小のものは、線分である。

曲がっていることは長さを計算できればわかるが、どれくらい曲がっているかは、弧長をパラメータとする曲線に対して定義される。

常に $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{c}}{\mathrm{d}t} \neq \overrightarrow{0}$ のとき、$s(t) = \displaystyle\int_0^t \|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{c}}{\mathrm{d}t}\|\mathrm{d}t$ は、t について狭義単調増加関数であり、$s : [0,1] \longrightarrow [0,\ell]$ ($\ell = \mathrm{length}(c)$) は逆関数 $t(s)$ をもつ。$\overrightarrow{c}(s) = \overrightarrow{c}(t(s))$ は弧長 s をパラメータとする曲線である。

$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = 1/\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 1/\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{c}}{\mathrm{d}t}\|$ だから、微分 $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{c}}{\mathrm{d}s}$ は存在し、

$$\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{c}}{\mathrm{d}s}\| = \|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{c}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\| = \|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{c}}{\mathrm{d}t}/\|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{c}}{\mathrm{d}t}\|\| = 1$$

$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{c}}{\mathrm{d}s}$ は、曲線上の点での方向を表す。方向の変化 $\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{c}}{\mathrm{d}s^2}$ が曲がり方を表す。

曲がり方は、ベクトル $\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{c}}{\mathrm{d}s^2}$ で表され、その大きさ $\|\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{c}}{\mathrm{d}s^2}\|$ が曲率と呼ばれる。

3 次元空間の曲線 $\overrightarrow{c}$ に対し、$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{c}}{\mathrm{d}s}$ は、単位球面上の点を表し、単位球面上の点が動く速さが曲率であるが、単位球面上の点 $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{c}}{\mathrm{d}s}$ に接するベクトル $\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{c}}{\mathrm{d}s^2}$ は、ベクトル積 $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{c}}{\mathrm{d}s} \times \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{c}}{\mathrm{d}s^2}$ の方向を軸として回転しているとみられる。

平面上の曲線に対しては、右手系でベクトル積の方向が z 軸正方向となる左回り、z 軸負方向となる右回りがあり、これらを正負の符号で区別することもある。

1.3　曲面上の距離

3 次元ユークリッド空間内の曲面で、（C^∞ 級）関数 $f : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ によって $f(\overrightarrow{x}) = 0$ で表されるものを考える。$\mathrm{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix}$ は、曲面の法線ベクトルを与えるが、$f(\overrightarrow{x}) = 0$ となる $\overrightarrow{x}$ において $\mathrm{grad}(f) \neq \overrightarrow{0}$ という条件を課す（連結な閉集合となる曲面はこのように表される）。

曲線の長さが定義されていれば、連結な曲面上の 2 点の距離は、 2 点を曲面上の曲線で結ぶとき最も短い曲線の長さとして定義される。このような曲線は、C^∞ 級の曲線となる。

1.4　ガウス曲率

曲面 $f(\overrightarrow{x}) = 0$ の点 $\overrightarrow{q}$ で $\mathrm{grad}(f)_{(\overrightarrow{q})}$ を Z 軸の基本ベクトルとする正規直交座標 (X, Y, Z) をとると曲面 $f(\overrightarrow{x}) = 0$ のテーラー展開は $Z = \frac{a}{2}X^2 + bXY + \frac{c}{2}Y^2 + \cdots$ の形になる。$Z = F(X, Y)$ と書かれているとき、$a = \frac{\partial^2 F}{\partial X^2}$, $b = \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y}$, $c = \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}$ であり、行列 $\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2} \end{pmatrix}$ をヘッセ行列と呼んでいる。X 軸、Y 軸を XY 平面上で回転して、この 2 次形式を、標準形に直して、$b = 0$ の形にできる: $Z = \frac{A}{2}X^2 + \frac{C}{2}Y^2 + \cdots$. この曲面の概形は、$A, C$ が同符号と異符号のときで全く違うものになる。同符号ならば凸であり、異符号のときは、接平面と曲面が交わる。このときの X 軸方向、Y 軸方向を主曲

率方向と呼び、A, C を主曲率と呼ぶ。AC をガウス曲率と呼ぶが、これはヘッシアンである。

1.5　ガウス写像

曲面 $f(\overrightarrow{x}) = 0$ の単位法線ベクトルは $\overrightarrow{n} = \dfrac{\mathrm{grad}(f)}{\|\mathrm{grad}(f)\|}$ で与えられる。$\overrightarrow{n}$ は曲面から単位球面への写像である。$f(\overrightarrow{q})$ において $\overrightarrow{n}(\overrightarrow{q}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。$f(\overrightarrow{q})$ の近くで曲面は $z = F(x, y)$, $\mathrm{grad}(F) = \overrightarrow{0}$ と書かれる $\overrightarrow{n}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ \sqrt{1-u^2-v^2} \end{pmatrix}$ とおくと、$G = ((\dfrac{\partial F}{\partial x})^2 + (\dfrac{\partial F}{\partial y})^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$ として、

$$u(x,y) = -\frac{1}{G}\frac{\partial F}{\partial x}$$
$$v(x,y) = -\frac{1}{G}\frac{\partial F}{\partial y}$$

【問】　変換 $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ の $\overrightarrow{0}$ におけるヤコビアンを求めよ。

　ガウス曲率を積分すると、$\overrightarrow{n}$ の像の面積が得られる。これが、ガウス・ボネの定理のひとつの形である。

　曲面が、球面のとき積分は 4π, トーラスのとき 0, 種数 2 の閉曲面のとき -4π, 種数 3 の閉曲面のとき $-8\pi, \ldots$ となる。

【問】　ガウス写像を観察して、球面、トーラスのときのガウス曲率の積分が上の値になることを説明せよ。

1.6　漸近方向

曲面が $Z = \dfrac{A}{2}X^2 + \dfrac{C}{2}Y^2 + \cdots$ の形に書かれ、ガウス曲率が負であるとすると、2 次の項は $Z = \pm(\sqrt{\dfrac{|A|}{2}}X + \sqrt{\dfrac{|C|}{2}}Y)(\sqrt{\dfrac{|A|}{2}}X - \sqrt{\dfrac{|C|}{2}}Y)$ の形に因数分解できる。

　XYZ 座標での方向 $(\pm\sqrt{|C|}, \pm\sqrt{|A|}, 0)$ を漸近方向と呼ぶ。負曲率の曲面の各点で 2 つの方向が定まる。この 2 つの方向により局所的には 2 つのベクトル場を定めることができる。

　このベクトル場は、ヒルベルトの定理「定負曲率曲面は、3 次元ユークリッド空間に滑らかに等長的にはめ込まれない」の証明に使われる。

1.7　定曲率の曲面

定曲率の曲面の例を挙げる。

- 曲率 0 の曲面としては、平面、円柱面などが挙げられる。各点である方向の直線を含んでいる。曲率 0 の曲面上では、ユークリッドの平面幾何が成立している。

- 正定曲率の曲面の典型例は、球面である。単位球面 S^2 上の 2 点を結ぶ曲線のうちで長さが最小なものは 2 点と 3 次元ユークリッド空間の原点を通る平面と単位球面の交わりとして与えられる大円の劣弧である。単位球面上の三角形 ABC の面積は $A+B+C-2\pi$ と表される。

- 定負曲率の曲面は、部分的には 3 次元ユークリッド空間に埋め込まれた形で表示できる。擬球と呼ばれる曲面はそういうものの中でもっともよく知られている。抽象的には、ポアンカレ円板として与えられるものが典型的である。ポアンカレ円板は、$\{z \in \mathbf{C} \bigm| |z| < 1\}$ にリーマン計量 $g = \dfrac{4(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2)}{(1-x^2-y^2)^2} = \dfrac{4\mathrm{d}z\mathrm{d}\overline{z}}{(1-z\overline{z})^2}$ を与えたものである。測地線は、円板の境界に垂直であるような円弧となる。ポアンカレ円板上の三角形 ABC の面積は $2\pi - A - B - C$ と表される。

- このような曲面でのガウス曲率 κ は、半径 r の円周の長さ $\ell(r)$ の 3 階微分を見ることでわかる。$\kappa = -\dfrac{1}{2\pi}\Big(\dfrac{\mathrm{d}^3\ell}{\mathrm{d}r^3}\Big)_{(0)}$.

- 単位球面上で、半径 r の円周の長さは
$$\int_0^{2\pi} \sin r \mathrm{d}\theta = 2\pi \sin r = 2\pi(r - \frac{1}{6}r^3 + \cdots).$$

- ポアンカレ円板上で 0 と x の距離は次で計算される。
$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{2}{1-x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^x (\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x})\mathrm{d}x \\ &= \Big[-\log(1-x) + \log(1+x) \Big]_0^x = -\log(1-x) + \log(1+x) = r\end{aligned}$$
$\dfrac{1+x}{1-x} = e^r$ だから、$x = \dfrac{e^r-1}{e^r+1} = \tanh(\dfrac{r}{2})$.
$$\int_0^{2\pi} \frac{2}{1-(\dfrac{e^r-1}{e^r+1})^2}\frac{e^r-1}{e^r+1}\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2(e^r+1)(e^r-1)}{(e^r+1)^2-(e^r-1)^2}\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \frac{e^r - e^{-r}}{2}\mathrm{d}\theta = 2\pi \sinh(r) = 2\pi(r + \frac{1}{6}r^3 + \cdots)$$

2　測地線

2.1　測地線 1

曲線の長さを定義し、「一般の曲面」上の 2 点を曲面上の曲線で結ぶとき最も短い曲線を探す。曲面上のこのような曲線を測地線と呼ぶが、この曲線は質点が曲面上を動くという

拘束条件のもとで自由に運動するときの軌道である。

実際、球面 $f(\overrightarrow{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ 上の質点 $\overrightarrow{q}$ が、そのように動くことは、次で記述される。$\overrightarrow{q} \bullet \overrightarrow{q} = 1,\ \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{q}}{\mathrm{d}t^2} = a(t)\mathrm{grad}(f) = 2a(t)\overrightarrow{q}.$

最初の条件から、$\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{q}}{\mathrm{d}t} \bullet \overrightarrow{q} = 0.$ もう一度微分して、$\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{q}}{\mathrm{d}t^2} \bullet \overrightarrow{q} + \|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{q}}{\mathrm{d}t}\|^2 = 0.$ これに第２の条件を代入して、$2a(t)(\overrightarrow{q} \bullet \overrightarrow{q}) + \|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{q}}{\mathrm{d}t}\|^2 = 0.$ すなわち、$2a(t) = -\|\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{q}}{\mathrm{d}t}\|^2.$

大円であることを言うには、$\overrightarrow{q}$ と $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{q}}{\mathrm{d}t}$ が定める平面は、原点を通るが、その方向が一定でであることを言えば良い。$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overrightarrow{q} \times \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{q}}{\mathrm{d}t}) = \overrightarrow{0}$ だからこの平面の方向は一定である。速さも $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{q}}{\mathrm{d}t} \bullet \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{q}}{\mathrm{d}t}) = 0$ だから一定である。

2.2 測地線２

３次元ユークリッド空間内の一般の曲面は、ある関数 $f(x_1, x_2, x_3)$ の等位面 $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ として現れる。f の法線ベクトルは、$\mathrm{grad}(f) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3} \end{pmatrix}$ で与えられる。単位法線ベクトルは、$\dfrac{\mathrm{grad}(f)}{\|\mathrm{grad}(f)\|}$ である。$f(x_1, x_2, x_3) = 0$ が曲面を定義するためには、$f(\overrightarrow{q}) = 0$ となる $\overrightarrow{q}$ において $\mathrm{grad}(f) \neq \overrightarrow{0}$ という条件を課す。

こうして与えられた曲面の測地線は、$f(\overrightarrow{q}) = 0,\ \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{q}}{\mathrm{d}t^2} = a(t)\mathrm{grad}(f)_{(\overrightarrow{q})}$ を満たす。最初の条件の微分をとると、$\mathrm{grad}(f)_{(\overrightarrow{q})} \bullet \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{q}}{\mathrm{d}t} = 0.$ これは、$\sum \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = 0.$ これをさらに微分すると、

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} + \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}t^2} = 0.$$

すなわち、

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} + a(t)\sum (\frac{\partial f}{\partial x_i})^2 = 0.$$

これから $a(t)$ を求め、次を得る。$\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{q}}{\mathrm{d}t^2} = -\dfrac{\sum \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}}{\|\mathrm{grad}(f)\|^2}\mathrm{grad}(f)_{(\overrightarrow{q})}.$ 成分で表記すると $\dfrac{\mathrm{d}^2 x_k}{\mathrm{d}t^2} = -\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}}{\sum_\ell (\dfrac{\partial f}{\partial x_\ell})^2}\sum \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}.$ これは、２階の正規形の常微分方程式というものであり、初期値、$\overrightarrow{q}_{(0)}, (\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{q}}{\mathrm{d}t})_{(0)}$ を定めれば解が定まる。しかし書き下すことも難しいし、一般には解を知っている関数で書くことはできない。

常微分方程式の解の性質として、この常微分方程式から、$f(\overrightarrow{x}_{(t)})=0$ となることがわかる。実際、この値の t に対する変化をみると、$t=0$ のとき $f(\overrightarrow{x}_{(0)})=0$. $\dfrac{\mathrm{d}f(\overrightarrow{x}_{(t)})}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{\mathrm{d}t}\bullet\mathrm{grad}(f)_{(\overrightarrow{x})}$. この値は初期値においては、速度ベクトルは曲面に接しており、法線ベクトルと直交するから、$t=0$ のとき 0. 常微分方程式から

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2f(\overrightarrow{x}_{(t)})}{\mathrm{d}t^2}&=\sum\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}+\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2}\\&=\sum\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}+\sum\frac{\partial f}{\partial x_k}\Bigg(-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_k}}{\displaystyle\sum_\ell(\frac{\partial f}{\partial x_\ell})^2}\sum\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}\Bigg)=0\end{aligned}$$

である。従って、$f(\overrightarrow{x}_{(t)})=0$.

また、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{\mathrm{d}t}\bullet\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{\mathrm{d}t})=0$ がわかる。実際、$a=-\dfrac{\sum\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t}}{\|\mathrm{grad}(f)\|^2}$ とおいて、$\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{x}}{\mathrm{d}t^2}=a(t)\mathrm{grad}(f)_{(\overrightarrow{x})}$ がわかので、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{\mathrm{d}t}\bullet\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{\mathrm{d}t})=2\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{\mathrm{d}t}\bullet\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{x}}{\mathrm{d}t^2}=2\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{\mathrm{d}t}\bullet a(t)\mathrm{grad}(f)_{(\overrightarrow{x})}=a(t)\frac{\mathrm{d}f(\overrightarrow{x}_{(t)})}{\mathrm{d}t}=0.$$

講義では説明しきれなかったが、連結な閉曲面上の 2 点を結ぶ曲線のなかで長さが最小のものがあり、測地線がこれを与えることは、次の指数写像を使って示す。

2.3 指数写像

「指数写像：曲面上の点 $\overrightarrow{q}$ における速度ベクトル $\longmapsto$ これを初期値とする解の時刻 1 の点」として定義する。$E:\overrightarrow{v}\longmapsto\overrightarrow{E}(\overrightarrow{v})$ と書く。長さの最小性は、指数写像を使って導かれる。

$\overrightarrow{H}(s,t)=\overrightarrow{E}(t\overrightarrow{w}(s))$ とする。$\overrightarrow{w}$ の大きさを 1 とする。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\sum\frac{\partial H_i}{\partial s}\frac{\partial H_i}{\partial t})&=\sum\frac{\partial^2 H_i}{\partial s\partial t}\frac{\partial H_i}{\partial t}+\sum\frac{\partial H_i}{\partial s}\frac{\partial^2 H_i}{\partial t^2}\\&=\sum\frac{\partial^2 H_i}{\partial s\partial t}\frac{\partial H_i}{\partial t}-\frac{\sum\dfrac{\partial H_i}{\partial s}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}}{\displaystyle\sum_\ell(\frac{\partial f}{\partial x_\ell})^2}\sum\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}\frac{\partial H_j}{\partial t}\frac{\partial H_k}{\partial t}\\&=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}(\sum\frac{\partial H_i}{\partial t}\frac{\partial H_i}{\partial t})\end{aligned}$$

なぜなら $\sum\dfrac{\partial H_i}{\partial s}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}=\dfrac{\partial f(\overrightarrow{H}(s,t))}{\partial s}=0$. 最後の項も定数の微分で 0.

2.4 測地線の「長さの最小性」

- 空間では直線の長さが最小であること。

$\overrightarrow{c}(t)$ に対し、線分の方向の単位ベクトル $\overrightarrow{v}$ を取り、$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{c}}{\mathrm{d}t}(t)\bullet\overrightarrow{v}\mathrm{d}t \leqq \int \|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{c}}{\mathrm{d}t}(t)\|\mathrm{d}t = L(C)$

- 球面の大円の長さが最小であることも同様に考えられる。
- 曲線 $\overrightarrow{E}(\overrightarrow{v}(\tau)) = \overrightarrow{E}(t(\tau)\overrightarrow{w}(\tau))$ に対し、

$$\|\frac{\partial}{\partial\tau}(\overrightarrow{E}(\overrightarrow{v}(\tau)))\| = \|\frac{\partial\overrightarrow{H}}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial\overrightarrow{H}}{\partial s}\| \geqq \|\frac{\partial\overrightarrow{H}}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\|$$

であることから、曲線の長さは $|t(1)-t(0)|$ 以上となる。

2 点の距離を 2 点を結ぶ曲線の長さの最小値として定義する。

$$\begin{aligned}&\mathrm{dist}(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})\\ =&\min\{\mathrm{length}(\overrightarrow{c}) \mid \overrightarrow{c}(0) = \overrightarrow{x},\ \overrightarrow{c}(1) = \overrightarrow{y},\ f(\overrightarrow{c}(t)) = 0\}\end{aligned}$$

これは、測地線の方程式は、f を使って書かれているが、測地線は局所的に最短距離を与えるということだから、曲線の長さの測り方だけに依存していることを示している。

曲線の長さは、ユークリッド空間の曲線として長さを測っているが、曲面をパラメータ表示して $\overrightarrow{q} : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ とするとき、$\mathbf{R}^2$ の曲線 $(u_1(t), u_2(t))$ に対し、$\overrightarrow{q}(u_1(t), u_2(t))$ の長さは

$$\begin{aligned}&\int\sqrt{\sum_k(\sum_i\frac{\partial x_k}{\partial u_i}\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t})^2}\mathrm{d}t\\ =&\int\sqrt{\sum_k(\sum_i\frac{\partial x_k}{\partial u_i}\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t})(\sum_j\frac{\partial x_k}{\partial u_j}\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t})}\mathrm{d}t\\ =&\int\sqrt{\sum_{i,j}(\sum_k\frac{\partial x_k}{\partial u_i}\frac{\partial x_k}{\partial u_j})\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

と表される。$\displaystyle g_{ij} = \sum_k\frac{\partial x_k}{\partial u_i}\frac{\partial x_k}{\partial u_j} = \frac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial u_i}\bullet\frac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial u_j}$ とおくと、これは平面上の（正値対称行列に値を持つ）関数で、

$$\int\sqrt{\sum_{i,j}g_{ij}\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}}\mathrm{d}t$$

が長さを与えている。各点に正値対称行列を与えることを、リーマン計量を与えるという。変分法により、曲線の長さの極値を与えることから測地線の方程式を導くことができる。

2.5　曲面のパラメータ表示における測地線

$\overrightarrow{q}(\overrightarrow{u})$ が曲面を与えているとき、$\dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial u_i}$ は、曲面の接空間を張っている。$\dfrac{\partial^2\overrightarrow{q}}{\partial u_i\partial u_j}$ は、曲面方向の成分とその直交方向 $\overrightarrow{n}$ の成分の和になる。

$$\frac{\partial^2\overrightarrow{q}}{\partial u_i\partial u_j} = \sum_\ell\Gamma^\ell_{ij}\frac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial u_\ell} + h_{ij}\overrightarrow{n}$$

成分で書けば、

$$\frac{\partial^2 x_k}{\partial u_i \partial u_j} = \sum_\ell \Gamma_{ij}^\ell \frac{\partial x_k}{\partial u_\ell} + h_{ij}\overrightarrow{n}$$

このとき $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{q}}{\mathrm{d}t^2}$ が n 方向、すなわち $\dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial u_i}$ 方向の成分が 0 となることを計算する。
$\dfrac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}t} = \displaystyle\sum_i \frac{\partial x_k}{\partial u_i}\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}$ を微分して、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 x_k}{\mathrm{d}t^2} &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 x_k}{\partial u_i \partial u_j}\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t} + \sum_i \frac{\partial x_k}{\partial u_i}\frac{\mathrm{d}^2 u_i}{\mathrm{d}t^2} \\ &= \sum_{i,j}(\sum_\ell \Gamma_{ij}^\ell \frac{\partial x_k}{\partial u_\ell} + h_{ij}n_k)\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t} + \sum_i \frac{\partial x_k}{\partial u_i}\frac{\mathrm{d}^2 u_i}{\mathrm{d}t^2}\end{aligned}$$

この式の $\dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial u_\ell}$ 成分は 0 であることから、

$$\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^\ell \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}^2 u_\ell}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

を得る。$\overrightarrow{n}$ 方向は、$\dfrac{\mathrm{d}^2 x_k}{\mathrm{d}t^2} = \displaystyle\sum_{i,j} h_{ij}\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}u_j}{\mathrm{d}t}n_k$ を得る。常微分方程式の解の存在と一意性の定理は、曲面方向の方程式を満たしていれば、法線方向の方程式を満たすことを意味する。

Γ_{ij}^ℓ は g_{ij} で表すことができる。実際、

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} &= \sum_m \frac{\partial^2 x_m}{\partial u_i \partial u_k}\frac{\partial x_m}{\partial u_j} + \sum_m \frac{\partial x_m}{\partial u_i}\frac{\partial^2 x_m}{\partial u_j \partial u_k}, \\ \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} &= \sum_m \frac{\partial^2 x_m}{\partial u_i \partial u_j}\frac{\partial x_m}{\partial u_k} + \sum_m \frac{\partial x_m}{\partial u_i}\frac{\partial^2 x_m}{\partial u_k \partial u_j}, \\ \frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} &= \sum_m \frac{\partial^2 x_m}{\partial u_j \partial u_i}\frac{\partial x_m}{\partial u_k} + \sum_m \frac{\partial x_m}{\partial u_j}\frac{\partial^2 x_m}{\partial u_k \partial u_i}\end{aligned}$$

だから
$-\dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} - \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} - \dfrac{\partial g_{kj}}{\partial u_i}) = \displaystyle\sum_m \frac{\partial^2 x_m}{\partial u_i \partial u_j}\frac{\partial x_m}{\partial u_k}$ であるが、$\dfrac{\partial^2\overrightarrow{q}}{\partial u_i \partial u_j} = \displaystyle\sum_\ell \Gamma_{ij}^\ell \frac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial u_\ell} + h_{ij}\overrightarrow{n}$ と $\dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial u_k}$ の内積をとると、$\displaystyle\sum_m \frac{\partial^2 x_m}{\partial u_i \partial u_j}\frac{\partial x_m}{\partial u_k} = \sum_\ell \Gamma_{ij}^\ell g_{\ell k}$ となり、$g_{\ell k}$ の逆行列を使えば、Γ_{ij}^ℓ が g_{ij} で書かれる。

$$\sum_\ell \Gamma_{ij}^\ell g_{\ell k} = -\frac{1}{2}(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial u_i})$$

測地線の方程式は、f を使って書かれていたが、g_{ij} を用いて書かれることがわかった。測地線が定まれば半径 r の円周が定まり、そのの長さが定まり、それを r について 3 回微分してガウス曲率が計算される。これがガウスの「驚異の定理」Theorema Egregium のひとつの説明である。

3　ユークリッド空間の負曲率曲面

3.1　曲面上の模様

ユークリッド空間の負曲率曲面の各点に主曲率方向が定まる。負であることがわかっていれば、これはいたるところ定義され、直交する曲線族となる。

　例えば擬球面については、母線方向と回転方向である。

　また、ユークリッド空間の負曲率曲面の各点に漸近方向が定まる。これもいたるところ定義される曲面上の曲線族である。

　局所的に $u=\sqrt{\dfrac{|a|}{2}}X-\sqrt{\dfrac{|b|}{2}}Y=0$, $v=\sqrt{\dfrac{|a|}{2}}X+\sqrt{\dfrac{|b|}{2}}Y=0$ がともに漸近方向という座標 (u,v) が入っているとすると、$X=\dfrac{u+v}{\sqrt{2|a|}}$, $Y=\dfrac{v-u}{\sqrt{2|b|}}$ で、

$$\begin{aligned}\frac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial u}&=\frac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial u}+\frac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial u}=\frac{1}{\sqrt{2|a|}}\frac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial X}-\frac{1}{\sqrt{2|b|}}\frac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial Y}.\\ \frac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial v}&=\frac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial v}+\frac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial v}=\frac{1}{\sqrt{2|a|}}\frac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial X}+\frac{1}{\sqrt{2|b|}}\frac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial Y}\end{aligned}$$

従って、$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial u}\bullet\dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial u} & \dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial u}\bullet\dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial u}\bullet\dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial v} & \dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial v}\bullet\dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2|a|}+\dfrac{1}{2|b|} & \dfrac{1}{2|a|}-\dfrac{1}{2|b|}\\ \dfrac{1}{2|a|}-\dfrac{1}{2|b|} & \dfrac{1}{2|a|}+\dfrac{1}{2|b|}\end{pmatrix}$ ここで $\dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial u}$, $\dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial v}$ が単位ベクトルとなるように、パラメータを $\sqrt{\dfrac{1}{2|a|}+\dfrac{1}{2|b|}}$ 倍遅くする（ベクトル場に関数を掛ける）。

　そうすると、$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial u}\bullet\dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial u} & \dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial u}\bullet\dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial v}\\ \dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial u}\bullet\dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial v} & \dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial v}\bullet\dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial v}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \cos\theta\\ \cos\theta & 1\end{pmatrix}$ となっている。このとき $\cos\theta=\dfrac{\dfrac{1}{2|a|}-\dfrac{1}{2|b|}}{\dfrac{1}{2|a|}+\dfrac{1}{2|b|}}=\dfrac{|b|-|a|}{|b|+|a|}$ は、曲線族のなす角度である。

　$\dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial u}$, $\dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial v}$ は単位ベクトルだから、$\dfrac{\partial^2\overrightarrow{q}}{\partial u\partial v}$ は、この両方のベクトルに垂直であり、曲面に垂直である。

　$\dfrac{\partial^2\overrightarrow{q}}{\partial u_i\partial u_j}=\Gamma^{\ell}_{ij}\dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial u_\ell}+h_{ij}\overrightarrow{n}$ と書くとき、$\Gamma^{\ell}_{12}=0$ であり、$\dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial u}$ は $\dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial v}$ 方向（$u=$const の方向）に平行、$\dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial v}$ は $\dfrac{\partial\overrightarrow{q}}{\partial u}$ 方向（$v=$const の方向）に平行である。すなわち、ベクトル場の積分は可換となる。つまり $v=$const 方向に a, それから $u=$const 方向に b 進んだ点は、つまり $u=$const 方向に b, それから $v=$const 方向に a 進んだ点と一致する。

　uv 平面に $\begin{pmatrix}1 & \cos\theta\\ \cos\theta & 1\end{pmatrix}$ という計量が入っているときのガウス曲率 κ は求まり、$\kappa=-\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}$ となる。

【問】　uv 平面のガウス曲率を計算してみよ。

3.2　ヒルベルトの定理

ヒルベルトの定理はポアンカレ円板が $\mathbf{R}^3$ にはめ込まれないことを主張する。

ポアンカレ円板が $\mathbf{R}^3$ にはめ込まれたとする。uv 座標がとられた平面で $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta \\ \cos\theta & 1 \end{pmatrix}$ を持つものと、ポアンカレ円板が等長的に等しくなる。ここで、$\dfrac{\partial^2\theta}{\partial u \partial v} = \sin\theta$ が満たされている。uv についての矩形に対し、矩形の面積は

$$\int_0^u \int_0^v \sin\theta \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2\theta}{\partial u \partial v} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \theta(u,v) - \theta(u,0) - \theta(0,v) + \theta(0,0)$$

この値は 2π よりも小である。

一方、uv 座標はポアンカレ円板を覆いつくさなければならない。（$\dfrac{\partial}{\partial u}$, $\dfrac{\partial}{\partial v}$ の積分曲線は、常に横断的、集積しない。ポアンカレ・ベンディクソンを使う。）

【問】　ヒルベルトの定理の証明を自分の理解に沿ってまとめよ。

4　負曲率の世界と群の作用

空間の曲率とその上の群の作用の性質には密接な関係がある。特に、正、零、負の意味がはっきりしている 2 次元では顕著である。

正曲率の空間は、コンパクトになり、それに作用する等長変換群はコンパクト群になる。離散的に作用すると有限群になる。

曲率零の場合の離散的に作用する等長変換群の典型例は、ユークリッド空間に作用するもので、可換な平行移動を含む。実際には、群の増大度が多項式的になる。

負曲率空間の離散等長変換群は、自由群を含み指数増大度を持つ。

参考文献

- 小林昭七，曲線と曲面の微分幾何，裳華房; 改訂版 (1995) ISBN-13: 978-4785310912
- Etienne Ghys, Sur la coupe des vetements: variation autour d'un theme de Tchebychev. (French) [On the cutting of garments: variation on a theme of Chebyshev] Enseign. Math. (2) 57 (2011), no. 1-2, 165–208. (Etienne Ghys のウェブページに PDF ファイルがある)