2017年Ｓセメスター　学術フロンティア講義
レポート問題

山本昌宏　担当分

平成 29 年 6 月 29 日

以下の課題を最低 2 問、解答して２０１７年７月２６日（水）16:00 までに教務課に提出

以下、カプート微分を $\partial_t^\alpha v(t) = \int_0^t g(t-s)v'(s)ds$ で定義する。ただし、$0 < \alpha < 1$, $g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}$ で　Γ はガンマ関数である。

１．非整数階の微分、非整数階微分方程式について、印象に残った事実を述べよ（自由記述）。

２．普通の意味で $0 < t < T$ で微分できて、導関数が $0 \le t \le T$ で連続な関数 $v = v(t), u = u(t)$ に対して $\partial_t^\alpha (uv)(t) = v(t)\partial_t^\alpha u(t) + u(t)\partial_t^\alpha v(t)$ は成り立つか？　成り立つなら証明を、成り立たない場合は反例（成り立たないような u, v の例）をあげよ。

３．$u(t) = t^p$, $p > 0$ 場合、$\partial_t^\alpha(\partial_t^\beta u)(t) = \partial_t^{\alpha+\beta} u(t)$, $0 < \alpha, \beta < 1$, $\alpha + \beta < 1$ は成り立つか？成り立たない場合は反例をあげ、どのような p, α, β なら成り立つか、を考察せよ。

４．以下、普通の意味で $0 < t < T$ で微分できて、導関数が $0 \le t \le T$ で連続で、$v(0) = 0$ となる関数 v を考える。

（１）

$$\int_0^T v(t)\partial_t^\alpha v(t)dt \ge \frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)} T^{-\alpha} \int_0^T v(t)^2 dt$$

を以下のヒントをもとに証明せよ。

(a) $v'(s)v(s) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(v^2(s))$.

(b)

$$\begin{aligned} v(t)\partial_t^\alpha v(t) &= \int_0^t g(t-s)v'(s)dsv(t) \\ &= -\int_0^t g(t-s)\frac{d}{ds}(v(s)-v(t))(v(s)-v(t))ds + \int_0^t g(t-s)v'(s)v(s)ds \\ &=: S_1(t) + S_2(t). \end{aligned}$$

部分積分でそれぞれ $\int_0^T S_1(t)dt$, $\int_0^T S_2(t)dt$ を下から評価して結論を導く。

（２）：非整数階常微分方程式の解の一意性 $\partial_t^\alpha v(t) = -cv(t)$,　$0 < t < T$, ただし、$c > 0$ は定数である。　$v(0) = 0$ の時は $v(t) = 0$, $0 < t < T$ となることを (1) で示した不等式を用いて示せ。