

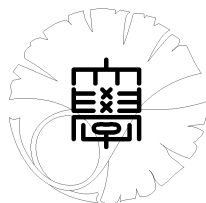
UTMS 2001–5

February 7, 2001

**Cohomologie syntomique
des $F - T$ -cristaux**

by

Fabien TRIHAN



UNIVERSITY OF TOKYO

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES

KOMABA, TOKYO, JAPAN

Cohomologie syntomique des $F - T$ -cristaux

Fabien Trihan*

* L'auteur a bénéficié du soutien de la J.S.P.S.

Mathematics Subject Classification (1991) : 14F30

Abstract. We generalize the study of the syntomic cohomology of [12] to the case of open varieties and with coefficients.

0. Introduction.

Dans cette article, nous nous efforçons de donner un cadre formel à la théorie de la cohomologie syntomique à coefficients sur l'ouvert \mathcal{U}_K (complémentaire d'un diviseur à croisements normaux \mathcal{D}_K) d'une variété \mathcal{X}_K/K propre et lisse, ayant bonne réduction, où K est une extension finie de \mathbf{Q}_p non-ramifiée. Le point de départ de cette étude est l'article de [1] où celui-ci construit un analogue p -adique à la cohomologie de Beilinson-Deligne en terme de groupes d'extensions dans la catégorie dérivée des modules filtrés admissibles.

Dans les chapitres 1 et 2, nous montrons que la catégorie des $F - T$ -cristaux de [22], équivalentes lorsque la filtration est de largeur inférieure ou égale à p à la catégorie des modules de Fontaine MF^∇ définie par [13], fournit les coefficients syntomiques appropriés. En l'occurrence, un tel objet induit un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -module E_K de type fini muni d'une connexion intégrable ∇ à pôles logarithmiques le long de \mathcal{D}_K , d'une filtration B exhaustive, séparée et Griffiths-transversale par rapport à la connexion et d'un frobenius parallèle par rapport à la filtration et à la connexion (cf condition (Frob2), 1.4). Un résultat de Faltings (voir aussi [22]) assure que la cohomologie D_i d'un tel coefficient est (sous certaines conditions concernant la dimension du schéma de base, ainsi que l'intervalle dans lequel se situe la filtration) un module filtré admissible (théorème 2.5) auquel est donc associé une représentation cristalline V_i . Sous nos hypothèses, D_i s'identifie à la cohomologie rigide d'un F -isocrystal surconvergent le long du diviseur associé fonctoriellement au coefficient syntomique. Il est en particulier muni d'une action de frobenius Φ . Vu comme cohomologie de de Rham, D_i est également muni d'une filtration. La cohomologie syntomique d'un coefficient (E_K, ∇, B, Φ) est alors définie comme le cône décallé de l'action $1 - \Phi : B^0 DR(E_K) \rightarrow DR(E_K)$, où $DR(E_K)$ est le complexe de de Rham calculant D_i , muni par Griffiths-transversalité d'une filtration induite par celle de E_K .

Dans le chapitre 4, nous traitons le cas particulier des coefficients triviaux et des images directes supérieures de $F - T$ -cristaux.

Classiquement (cf [19]) la cohomologie syntomique est liée à la cohomologie des cycles évanescents p -adiques, à la cohomologie des pentes et à celle de Bloch-Kato. Nous tentons de généraliser ces relations dans les trois derniers chapitres.

Dans le chapitre 5, nous montrons que la cohomologie syntomique et la cohomologie $H_e(K, V_i)$ de [6] sont égales. On peut d'autre part associer à un coefficient syntomique un faisceau fini étale localement constant sans p -torsion sur \mathcal{U}_K et généraliser la conjecture dite des points p -adiques de [23].

Dans le chapitre 6, nous montrons que la cohomologie syntomique calculée sur l'extension maximale non-ramifiée de K est égale à la représentation cristalline V_i sous certaines hypothèses (théorème 6.5).

Enfin dans le dernier chapitre nous construisons la cohomologie des pentes (nulles) associée à un coefficient syntomique et étudions quelques unes de ses propriétés.

Nous observons que la connaissance de la mixité (ou de la pureté) de (D_i, Φ) a d'importantes conséquences sur les précédentes cohomologies. En particulier, sous nos hypothèses la cohomologie rigide (sans coefficient) est munie d'une filtration de Hodge et d'une filtration par les poids ([9]). Une des questions naturelles est de se demander quelle est la bonne définition des structures de Hodge mixtes p -adique (qui serait l'analogue de [10]), i.e. quels axiomes, concernant filtration de Hodge et filtration par les poids doivent satisfaire de tels objets?

Nous espérons enfin que le cadre formel utilisé dans cet article permette de traiter dans l'avenir le cas semi-stable, où un opérateur de monodromie devrait alors intervenir.

1. Modules filtrés admissibles associés à des $F - T$ -cristaux.

Notations 1.1. Soient un corps fini k de caractéristique p , W l'anneau des vecteurs de Witt et K le corps des fractions muni d'un relèvement σ du Frobenius de k . On note W_n la réduction modulo p^n de W .

Soient \mathcal{X}/W un schéma propre et lisse de dimension d , \mathcal{D} un diviseur à croisements normaux de \mathcal{X} relativement à W tel que \mathcal{D} soit une union finie de sous-schémas fermés \mathcal{D}_i de \mathcal{X} de codimension 1, à fibres géométriquement connexes et $\mathcal{U} := \mathcal{X} \setminus \mathcal{D}$. On note respectivement X_n , D_n et U_n la réduction modulo p^n des schémas \mathcal{X} , \mathcal{D} et \mathcal{U} . On note également X , D et U leur fibre spéciale, \mathcal{X}_K , \mathcal{D}_K et \mathcal{U}_K leur fibre générique et $\hat{\mathcal{X}}$ le complété p -adique de \mathcal{X} .

Soient $\mathcal{X}^\#$ (resp. $X_n^\#$, $\mathcal{X}_K^\#$, $\hat{\mathcal{X}}^\#$), le log-schéma de schéma sous-jacent \mathcal{X} (resp. X_n , \mathcal{X}_K , $\hat{\mathcal{X}}$) et dont la log-structure est celle induite par \mathcal{D} (resp. D_n , \mathcal{D}_K ,

\hat{D}). Celui-ci est donc propre, log-lisse et intègre sur $\text{Spec } W$ (resp. $\text{Spec } W_n$, $\text{Spec } K$, $\text{Spf } W$). Notons F le frobenius de $X^\#$. On suppose que celui-ci se relève à tout $X_n^\#$. Ces log-schémas sont de type Cartier ([16]). On a donc un diagramme cartésien :

$$\begin{array}{ccc} X_n^{(p)\#} & \xrightarrow{\pi_{X_n^\#}} & X_n^\# \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } W_n & \xrightarrow{\sigma} & \text{Spec } W_n \end{array}$$

et une flèche $F_{X_n^\#} : X_n^\# \rightarrow X_n^{(p)\#}$, le frobenius relatif de $X_n^\#$, telle que $\pi_{X_n^\#} F_{X_n^\#} = F_n$.

Le Frobenius F_n induit une flèche :

$$dF_n : \Omega_{X_n^\#/W_n}^1 \rightarrow \Omega_{X_n^\#/W_n}^1.$$

Comme $X_n^\#/W_n$ est lisse le module différentiel à pôles logarithmique $\Omega_{X_n^\#/W_n}^q$ est un \mathcal{O}_{X_n} -module localement libre ([17],3.10). Comme d'autre part X_n/W_n est plat et qu'on a la relation :

$$dF_n \Omega_{X_n^\#/W_n}^1 \subset p \Omega_{X_n^\#/W_n}^1,$$

on en déduit l'existence d'une flèche :

$$dF_n/p : \Omega_{X_n^\#/W_n}^1 \rightarrow \Omega_{X_n^\#/W_n}^1.$$

Nous rappelons à présent quelques définitions de [22].

Définition 1.2. ([22],2.1.1;2.1.2;3.2.1;5.2.3) : Soit (E, A) , un faisceau filtré de \mathcal{O}_T -modules cohérents.

(i) Soit $g : T' \rightarrow T$ un morphisme, on dit que (E, A) est normalement transversal à g si les flèches $g^* A^k E \rightarrow g^* E$ sont injectives.

(ii) Soit J une filtration quasi-cohérente et multiplicative de \mathcal{O}_T . Alors (E, A) est G -transversal par rapport à J si on a pour tout k :

$$J E \cap A^k E = J^1 A^{k-1} E + J^2 A^{k-2} E + \dots$$

(iii) Un T -cristal sur $X_n^\#/W$ consiste en la donnée d'un cristal E , muni d'une filtration B satisfaisant les conditions suivantes pour tout p.d-épaississement (U, T) de $X_n^\#/W$ et d'idéal de définition J_T :

(1) (E_T, B_T) est G -transversal par rapport à J_T .

(2) La filtration induite par B_T sur E_U est la filtration B_U .

(3) pour tout $i \leq n$, notons $i : X_i^\# \rightarrow X_n^\#$ l'immersion fermée définie en quotientant par p^i . Alors $(E_n := E_{X_n^\#}, B_n := B_{X_n^\#})$ est normalement transversal à i . S'il existe un entier w et, pour tout p.d-épaississement (U, T) , un intervalle $[m, n]$, avec $n - m = w$ tel que $B_T^{n+1} \subset J_T E_T$ et $B_T^m E_T = E_T$, on dit que le T -cristal est de largeur inférieure ou égale à w .

(iv) Un F_γ -span est un couple (E', M_γ) formé d'un cristal sur $X^{(p)\#}/W$ sans p -torsion (i.e. que la multiplication par p dans E' est injective) et d'une filtration M_γ de $F_{X^\#}^* E'$ par des sous-cristaux qui est G -transversale par rapport au p.d.-idéal (p, γ) . On note $(E_n, M_{\gamma, n})$ le système compatible obtenu en considérant les réalisations de (E, M_γ) en les p.-d.épaississements $(X^\# \hookrightarrow X_n^\#)$.

Nous pouvons à présent définir la notion de $F - T$ -cristaux ([22],5.3.1):

Définition 1.3 Un $F - T$ -cristal sur $\hat{\mathcal{X}}^\#/W$ consiste en la donnée d'un triplet (E, Φ, B) défini comme suit :

(1.3.1) (E, Φ) est un cristal sur $X^\#/W$ de type fini, sans p -torsion et muni d'une p -isogénie $\Phi : F^* E \rightarrow E$. D'après [22],5.1.2, on peut associer à cette p -isogénie le F_γ -span $(E' = \pi_{X^\#}^* E, M_\gamma^i := \Phi^{-1}(p^i E))$.

(1.3.2) La réalisation du cristal en $\hat{\mathcal{X}}^\#$ induit un module à connexion $(E_{\hat{\mathcal{X}}}, \nabla)$. On munit alors le $\mathcal{O}_{\hat{\mathcal{X}}}$ -module $E_{\hat{\mathcal{X}}}$ d'une filtration B , Griffiths-transversale par rapport à ∇ (i.e. $\nabla B^r \subset B^{r-1} \otimes \Omega_{\hat{\mathcal{X}}^\#/W}^1$) et telle que $Gr_B E_{\hat{\mathcal{X}}}$ soit sans p -torsion. On note (E_n, ∇_n, B_n) le système compatible de T -cristaux sur $X_n^\#/W$ induit par $(E_{\hat{\mathcal{X}}}, \nabla, B)$.

(1.3.3) On impose de plus les conditions ci-dessous sur (E_n, B_n) :

(i) Le couple (E_n, B_n) est normalement transversal par rapport à $\pi_{X_n^\#}$. En conséquence celui-ci induit par image inverse un T -cristal noté $(E'_n, B'_n) = \pi_{X_n^\#}^*(E_n, B_n)$ ([22],3.3.1).

(ii) le couple (E'_n, B'_n) est normalement transversal par rapport à $F_{X^\#}$ et induit par image inverse un T -cristal filtré par des sous-cristaux tel que cette filtration est G -transversale par rapport à (p, γ) ([22],5.2.5). On note $(E'_n, M'_{\gamma, n}) := (E'_n, F_n^* B_n)$, le F_γ -span induit naturellement par cette construction.

(iii) On a un isomorphisme de F_γ -spans :

$$(E'_n, M'_{\gamma,n}) \simeq (E'_n, M_{\gamma,n}), \text{ i.e.}$$

$$F_n^* B_n^i \simeq \Phi^{-1}(p^i E_n).$$

Enfin, on dira qu'un $F - T$ -cristal est de largeur inférieure ou égale à w si le système compatible de T -cristaux de 1.3.2 a cette propriété.

Nous rappelons à présent la définition des modules de Fontaine (au sens [11] ou [22],5.3) :

Définition 1.4.

(i) Soient $X_n^\#/W_n$ un (log-)schéma lisse, muni d'un relèvement F_n du frobenius absolu de $X_1^\#/k$ sa réduction mod p . La catégorie $MF_{big}(X_n^\#)$ consiste en les couples (M_n, Φ_n) où $M_n := (M_n^i, j_i)_i$ est un système projectif de $\mathcal{O}_{X_n^\#}$ -modules et $\Phi_n := (\Phi_n^i : F_n^* M_n^i \rightarrow M_n)_i$ une collection de flèches linéaires telles que pour tout $i \geq 1$:

(Frob 0)
$$\Phi_n^{i-1} F_n^*(j_i) = p \Phi_n^i.$$

On note \tilde{M}_n la limite inductive du système :

$$\varinjlim (\dots \rightarrow M_n^{i+1} \xleftarrow{p} M_n^{i+1} \xrightarrow{j_i} M_n^i \xleftarrow{p} M_n^i \rightarrow \dots)$$

Ce module est muni d'une fêche :

$$\tilde{\Phi}_n : F_n^* \tilde{M}_n \rightarrow M_n,$$

induite par les flèches Φ_n^i .

(ii) Pour $w \geq 0$, on note $MF_w(X_n^\#)$ la sous-catégorie pleine de $MF_{big}(X_n^\#)$ constituée des objets (M_n, Φ_n) tels que pour tout i , M_n^i est cohérent et tels qu'il existe des entiers a et b , avec $b - a = w$ et tels que $M_n^i = 0$ pour $i > b$ et j_i est un isomorphisme pour $i \leq a$. Enfin, on demande que la propriété suivante soit satisfaite :

(Frob 1)
$$\tilde{\Phi}_n \text{ est un isomorphisme .}$$

Rappelons que d'après [22],5.3.3, les morphismes j_i sont injectifs de telle manière que le système projectif (M_n, j_i) peut être considéré comme un objet filtré.

(iii) Pour $w \geq 0$, on note $MF_w^\nabla(X_n^\#)$ la catégorie constituée des objets de $MF_w(X_n^\#)$ munis de plus d'une connexion :

$$\nabla : M \rightarrow M \otimes \Omega_{X_n^\#/W_n}^1$$

telle que la filtration (M^i) soit Griffiths-transversale et Φ soit parallèle par rapport à ∇ , i.e. qu'on a un diagramme commutatif pour tout i :

$$\begin{array}{ccc} F_n^* M_n^i & \xrightarrow{F_n^*(\nabla_i)} & F_n^* M_n^{i-1} \otimes \omega_{X_n^\#/W_n}^1 \\ \downarrow \Phi_n^i & & \downarrow \Phi_n^{i-1} \otimes dF_n/p \\ M_n & \xrightarrow{\nabla} & M_n \otimes \omega_{X_n^\#/W_n}^1 \end{array}$$

(Frob2)

où $\nabla_i : M_n^i \rightarrow M_n^{i-1} \otimes \omega_{X_n^\#/W_n}^1$ est la flèche induite par ∇ grâce à la Griffiths-transversalité de la filtration (M_n^i) .

(iv) Soit $\hat{\mathcal{X}}^\#/W$ un schéma formel lisse et $X_n^\#/W_n$ sa réduction modulo p^n . On notera $MF_{big}(\hat{\mathcal{X}}^\#)$ (respectivement $MF_w(\hat{\mathcal{X}}^\#)$, $MF_w^\nabla(\hat{\mathcal{X}}^\#)$) la catégorie constituée de système compatible $(M_n, (M_n^i)_i, \Phi_n)_n$ (resp. $(M_n, (M_n^i)_i, \Phi_n)_n$, $(M_n, (M_n^i)_i, \Phi_n, \nabla_n)_n$) d'objets de $MF_{big}(X_n^\#)$ (resp. $MF_w(X_n^\#)$, $MF_w^\nabla(X_n^\#)$).

1.5. Il existe un foncteur canonique de la catégorie des $F-T$ -cristaux sur $\hat{\mathcal{X}}^\#/W$ de largeur inférieure ou égale à p dans la catégorie des objets de $MF^\nabla(\hat{\mathcal{X}}^\#/W)$ sans p -torsion. A tout $F-T$ -cristal (E, Φ, B) , on associe le système compatible $(E_n, \nabla_n, B_n, \Phi_n^i)$, où (E_n, ∇_n, B_n) est le \mathcal{O}_{X_n} -module à connexion filtré (Griffiths-transversalement) donnée par la réalisation de E en $(X^\# \hookrightarrow X_n^\#)$ et les flèches

$$\Phi_n^i : F_n^* B_n^i \rightarrow E_n,$$

sont construites de la manière suivante : pour tout n et tout $a \leq i \leq b$, on considère la flèche composée :

$$F_{n+i}^* B_{n+i}^i \xrightarrow{\Phi} p^i E_{n+i} \xrightarrow{p^{-i}} E_{n+i} \xrightarrow{\text{mod } p^i} E_n,$$

où la première flèche est bien définie d'après 1.3 (iii) et où la dernière l'est également par compatibilité du système (E_n) . En particulier $p^i F_{n+i}^* B_{n+i}^i$ est annulé par cette flèche qui se factorise ainsi en une flèche :

$$\Phi_n^i : F_{n+i}^* B_{n+i}^i / p^i F_{n+i}^* B_{n+i}^i \simeq F_n^* B_n^i \rightarrow E_n.$$

On vérifie immédiatement à partir de cette définition que la propriété (Frob 0) est satisfaite. La propriété (Frob2) résulte d'autre part de l'horizontalité du Frobenius et de la Griffiths-transversalité de la filtration par rapport à la connexion. Enfin, la propriété (Frob1) est démontrée dans [22], 5.3.11.4.

Rappelons à présent le résultat de [22],5.3.9 :

Théorème 1.6. *On se place sous les hypothèses de 1.1. Alors le foncteur canonique de la catégories des $F - T$ -cristaux sur $\hat{\mathcal{X}}^\# / W$ de largeur inférieure ou égale à p dans la catégorie des objets de $MF^\nabla(\hat{\mathcal{X}}^\# / W)$ sans p -torsion qui associe au triplet (E, Φ, B) le système compatible $(E_n, (B_n^i)_i, \Phi_n^i, \nabla_n)_n$ est une équivalence de catégories.*

(1.7) Soit (E, Φ, B) un $F - T$ -cristal sur $\hat{\mathcal{X}}^\# / W$. Comme \mathcal{X} / W est propre on peut montrer de manière analogue à [21],1.4 que la donnée 1.3.2 est équivalente à celle d'un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ -module à connexion logarithmique $(E_{\mathcal{X}}, \nabla)$ muni d'une filtration B . On note $E_{\mathcal{X}_K}$ le module associé sur la fibre générique de \mathcal{X} , $DR^\cdot(E_{\mathcal{X}}) := E_{\mathcal{X}} \otimes \Omega_{\mathcal{X}^\# / W}$ le complexe de de Rham associé à $E_{\mathcal{X}}$ et $H_{log-dR}^*(\mathcal{X}, E_{\mathcal{X}})$ sa cohomologie. Le complexe $DR^\cdot(E_{\mathcal{X}})$ admet une filtration donnée par :

$$B^m DR^q(E_{\mathcal{X}}) = B^{m-q} E_{\mathcal{X}} \otimes \Omega_{\mathcal{X}^\# / W}^q,$$

bien définie puisque la filtration est Griffiths-transversale par rapport à ∇ . La suite spectrale de Hodge-de Rham :

$$(1.7.1) \quad E_1^{i,j} = H^{i+j}(\mathcal{X}, Gr_B^i(DR^\cdot(E_{\mathcal{X}}))) \implies H_{log-dR}^{i+j}(\mathcal{X}, E_{\mathcal{X}}),$$

munit $H_{log-dR}^i(\mathcal{X}, E_{\mathcal{X}})$, i.e. via le lemme de Poincaré ([16]) $H_{cris}^i(X^\# / W, E)$, d'une filtration B appelée filtration de Hodge. La cohomologie du $F - T$ -cristal E est d'autre part munie d'un endomorphisme de frobenius :

$$\Phi : H_{cris}^i(X^\# / W, E) \rightarrow H_{cris}^i(X^\# / W, E)$$

induite par le frobenius de $X^\#$ ainsi que l'action de frobenius sur E .

Proposition 1.8. *Soit (E, Φ, B) un $F - T$ -cristal sur $\hat{\mathcal{X}}^\# / W$ de largeur inférieure ou égale à w tel que $w + d \leq p - 2$, alors :*

- (i) $(H_{cris}^i(X_n^\# / W_n, E_n), \Phi_n, B_n) \in MF(W_n)$.
- (ii) $(H_{cris}^i(X^\# / W, E) \otimes K, \Phi_K, B_K) \in MF_K^a$, la catégorie des modules filtrés admissibles au sens de [14].

Démonstration. La première assertion résulte du théorème 1.6 et de [11],4.1* (ou encore [22],8.2). D'après [14],7.8, pour montrer l'assertion (ii), il suffit de trouver pour le module filtré $(H_{cris}^i(X^\# / W, E) \otimes K, \Phi_K, B_K)$, un réseau fortement divisible. Remarquons tout d'abord que les catégories $MF(W_n)$ et MF_{tor}^f de [14],1.5 sont équivalentes. Considérons alors l'objet :

$$(H_{cris}^i(X^\# / W, E) / torsion, \Phi, B).$$

Celui-ci vérifie trivialement (via l'équivalence de catégories entre $MF(W_n)$ et MF_{tor}^f) les conditions (fd1), (fd2) et (fd3) de forte divisibilité de [14] et constitue ainsi le candidat souhaité.

Remarque 1.9. Dans la suite de l'article, nous considérerons uniquement des $F-T$ -cristaux de largeur inférieure ou égale à $p-1$. En particulier, d'après [11], 2.3 ceux-ci sont indépendants du choix d'un lifting du frobenius aux schémas $X_n^\#$. Question : pouvons-nous nous passer de l'hypothèse 1.1 concernant un tel lifting?

2. Coefficients syntomiques associés aux $F-T$ -cristaux.

Nous commençons par rappeler la définition des coefficients admissibles syntomiques de [1]. Nous conservons les hypothèses et notations de (1.1).

Définition 2.1. Un coefficient syntomique consiste en la donnée d'un quadruplet (E_K, ∇, B, Φ) tel que :

(i) E_K est un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -module de type fini muni d'une connexion intégrable à pôles logarithmiques le long de \mathcal{D}_K . Soit \mathcal{U}_K^{an} , l'espace analytique associé à \mathcal{U}_K . Celui-ci est un voisinage strict de $]U[$ dans $]X[$ au sens de [2]. On note $(E^{an}, \nabla) := (E_K, \nabla)|_{\mathcal{U}_K^{an}}$ le module à connexion induit sur \mathcal{U}_K^{an} et pour tout sous-voisinage strict $j : V \hookrightarrow \mathcal{U}_K^{an}$, (E_V, ∇) le module à connexion sur V . Le module à connexion

$$(E^\dagger, \nabla) := \lim_{\rightarrow V} (E_V, \nabla)$$

a alors une structure de $j^\dagger \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K^{an}}$ -module à connexion intégrable d'après [2], 2.2.3.

(ii) B est une filtration exhaustive, séparée et Griffiths-transversale par rapport à ∇ par des sous- $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -modules de E_K , appelée filtration de Hodge.

(iii) Le module à connexion E^\dagger est muni d'une structure de frobenius

$$\Phi : F^* E^\dagger \simeq E^\dagger,$$

horizontal par rapport à ∇ .

Remarque 2.2. La donnée 2.1 (iii) implique la surconvergence ([2], 2.2) de la connexion de E^\dagger . En effet, l'assertion est de nature locale et comme U/k est lisse, il suffit de montrer l'assertion dans le cas affine et lisse, ce qui résulte de [2], 2.5.7.

De manière analogue à 1.7, on munit la cohomologie de de Rham de (E_K, ∇) de la filtration B aboutissement de la suite spectrale :

$$(2.2.1) \quad E_1^{i,j} = H^{i+j}(\mathcal{X}_K, Gr_B^i(DR^\bullet(E_K))) \implies H_{log-dR}^{i+j}(\mathcal{X}_K, E_{\mathcal{X}_K}),$$

et la cohomologie rigide de E^\dagger d'une action de frobenius :

$$\Phi : H_{rig}^i(U/K, E^\dagger) \rightarrow H_{rig}^i(U/K, E^\dagger)$$

induite par le frobenius de U et l'action de frobenius E^\dagger .

Enfin, on peut construire (cf [1],1.3) un homomorphisme canonique :

$$(2.2.2) \quad \Theta : H_{log-dR}^i(\mathcal{X}_K, E_K) \rightarrow H_{rig}^i(U/K, E^\dagger).$$

Définition 2.3 Le coefficient syntomique (E_K, ∇, B, Φ) est dit admissible s'il satisfait les propriétés suivantes :

- (i) La suite spectrale (2.2.1) dégénère en E_1 .
- (ii) L'homomorphisme Θ est un isomorphisme.
- (iii) $(H_{rig}^i(U/K, E^\dagger), \Phi, B)$ est un module filtré admissible.

(2.4) Soit (E, Φ, B) un $F-T$ -cristal sur $\hat{\mathcal{X}}^\#/\mathcal{V}$. D'après 1.7, on peut associer à celui-ci un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_K}$ -module à connexion logarithmique (E_K, ∇) muni d'une filtration B_K satisfaisant clairement les conditions 2.1 (i) et (ii). La structure de F -cristal non-dégénéré de E permet d'autre part de munir le $j^\dagger \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K^{gn}}$ -module à connexion intégrable (E^\dagger, ∇) de 2.1 (i) d'une structure de frobenius faisant de (E_K, ∇, B, Φ) un coefficient syntomique. Le F -isocristal sur U surconvergent le long de D ainsi défini est par construction le même que celui défini dans [20,2].

Théorème 2.5. *Si le $F-T$ -cristal (E, Φ, B) est de largeur inférieure ou égale à w tel que $w + d \leq p - 2$, alors le coefficient syntomique associé est admissible.*

On dira que le $F-T$ -cristal est admissible et on notera $V_i(E)$ la représentation cristalline associée à $H_{rig}^i(U/K, E^\dagger)$.

Démonstration. Tout d'abord, la dégénérescence de la suite spectrale (2.2.1) résulte de [22],8.2.11. L'horizontalité du frobenius de E_K par rapport à ∇ implique que les endomorphismes résiduels :

$$Res_i(E_K, \nabla) : E_K|_{\mathcal{U}_K} \rightarrow E_K|_{\mathcal{U}_K},$$

le long de la composante lisse \mathcal{D}_{K^i} du diviseur vérifie la relation :

$$Res_i(E_K, \nabla)\Phi_K = pRes_i(F^*E_K, F^*\nabla).$$

Comme Φ_K est un isomorphisme, on déduit de la relation précédente que les valeurs propres de $Res_i(E_K, \nabla)$ sont nulles. La condition de [20],4.2 est ainsi satisfaite et on a donc un isomorphisme :

$$H_{cris}^i(X^\# / W, E) \otimes K \simeq H_{log-dR}^i(\mathcal{X}_K, E_K) \simeq H_{rig}^i(U/K, E^\dagger).$$

Enfin l'admissibilité résulte de 1.8 (ii).

Remarque 2.6. La dégénérescence de la suite spectrale implique en particulier que la filtration sur $H_{log-dR}^i(\mathcal{X}_K, E_K)$ est égale à :

$$B^m H_{log-dR}^i(\mathcal{X}_K, E_K) \simeq H^i(\mathcal{X}_K, B^m DR^\cdot(E_K)).$$

Ainsi si la filtration de E est dans l'intervalle $[a, b]$, celle de $H_{log-dR}^i(\mathcal{X}_K, E_K)$ est dans l'intervalle $[a, b + i]$.

3. Cohomologie syntomique absolue d'un $F - T$ -cristal.

(3.1) Nous reprenons les hypothèses et notations du chapitre précédent. Soit (E, Φ, B) un $F - T$ -cristal. On suppose que celui-ci est de largeur inférieure ou égale à $w = b - a$ tel que $w + d \leq p - 2$. Celui-ci induit d'après 2.5 un coefficient syntomique admissible (E_K, ∇, B, Φ) dont nous allons calculer la cohomologie syntomique absolue au sens de [1],2.4, notée $H_{syn}^i(\mathcal{X}, E_K)$, en reprenant la construction de [24],2.6. Soit $(E_n, B_n^i, \Phi_n^i, \nabla_n)_{n \geq 0}$ le système compatible de modules filtrés appartenant à $MF_w^\nabla(X_n^\#)$ induit par (E, Φ, B) via le foncteur défini dans 1.5. Pour n fixe, comme nous l'avons vu dans 1.7, le complexe de de Rham $DR^\cdot(E_n)$ admet une filtration $BDR^\cdot(E_n)$.

Pour tout $r \in \mathbf{Z}$, on définit un objet $\mathcal{S}_n(E, r)$ de la catégorie dérivée $D^+(\mathcal{X}_{et}, \mathbf{Z}/p^n \mathbf{Z})$ en posant :

$$\mathcal{S}_n(E, r) := Cone(1 - \Phi^r, B_n^r DR^\cdot(E_n) \rightarrow DR^\cdot(E_n))[-1],$$

où Φ^r est le morphisme de complexe dont la q -ième composante est :

$$\Phi_{n*}^{r-q} \otimes \wedge^q dF_n/p : B_n^{r-q} \otimes \Omega_{X_n^\# / W_n}^q \rightarrow E_n \otimes \Omega_{X_n^\# / W_n}^q,$$

en notant $\Phi_{n*}^i : B_n^i \rightarrow E_n$ la flèche obtenue par adjonction à partir de Φ_n^i . Lorsque n varie on obtient ainsi un pro-objet $\mathcal{S}(E, r)$ et on note :

$$H^i(\mathcal{X}_{et}, \mathcal{S}(E, r)) := \mathbf{R}^i(\lim_{\leftarrow} \Gamma)(\mathcal{X}_{et}, \mathcal{S}_n(E, r)),$$

et également :

$$H^i(\mathcal{X}_{et}, \mathcal{S}_{\mathbf{Q}_p}(E, r)) = H^i(\mathcal{X}_{et}, \mathcal{S}(E, r)) \otimes \mathbf{Q}_p.$$

Proposition 3.2. *Soit (E, Φ, B) un $F - T$ -cristal de largeur inférieure ou égale à $w = b - a$ tel que $w + d \leq p - 2$.*

(i) *Pour tout $a \leq r \leq b + d$, on a une suite exacte longue :*

$$\dots \rightarrow H^i(\mathcal{X}_{et}, \mathcal{S}(E, r)) \rightarrow B^r H_{log-dR}^i(\mathcal{X}, E_{\mathcal{X}}) \xrightarrow{1-\Phi^r} H_{cris}^i(X^\# / W, E) \rightarrow \dots$$

(ii) *La suite ci-dessus induit une suite exacte longue de cohomologie :*

$$\dots \rightarrow H^i(\mathcal{X}_{et}, \mathcal{S}_{\mathbf{Q}_p}(E, r)) \rightarrow B^r H_{log-dR}^i(\mathcal{X}_K, E_{\mathcal{X}_K}) \xrightarrow{(1-\Phi^r)^\Theta} H_{rig}^i(U/K, E^\dagger) \rightarrow \dots$$

(iii) *Pour tout $r < a$, on a :*

$$H^i(\mathcal{X}_{et}, \mathcal{S}(E, r)) = 0.$$

(iv) *Pour tout $r > b + d$, on a :*

$$H^i(\mathcal{X}_{et}, \mathcal{S}(E, r)) \simeq H_{cris}^{i-1}(X^\# / W, E).$$

Démonstration. La première suite exacte longue est celle associée au triangle distingué :

$$\mathcal{S}_n(E, r) \rightarrow B^r DR^\cdot(E_n) \rightarrow DR^\cdot(E_n),$$

étant donnée la remarque 2.6. La deuxième assertion est obtenue en tensorisant par K et en utilisant l'isomorphisme Θ . L'assertion (iii) résulte du fait que si $r < a$, l'opérateur Φ^r est divisible par p et est ainsi nilpotent. Il en résulte que $1 - \Phi^r$ est un isomorphisme, d'où l'assertion. Enfin, la dernière assertion résulte de la nullité du complexe $B_n^r DR^\cdot(E_n)$ lorsque $r > b + d$.

On déduit immédiatement de la définition de $\mathcal{S}(E, r)$ et de [1], 2.4 le corollaire suivant :

Corollaire 3.3. *Soit (E, Φ, B) un $F - T$ -cristal admissible. On a un isomorphisme :*

$$H_{syn}^i(\mathcal{X}, E_K) \simeq H^i(\mathcal{X}_{et}, \mathcal{S}_{\mathbf{Q}_p}(E, 0)).$$

4. Application aux objets de Tate ; image directe supérieure.

Définition 4.1. On définit un objet $\mathcal{O}_{X_n^\# / W_n}(0)$ de $MF_{[0,0]}^\nabla(X_n^\#)$ en posant :

$$\mathcal{O}_{X_n^\# / W_n}(0) := (\mathcal{O}_{X_n}, B^i(0), d, \phi(0)^i)$$

tel que :

- (i) $B^i(0) := \mathcal{O}_{X_n}$ si $i \leq 0$ et 0 sinon.
- (ii) $d : \mathcal{O}_{X_n} \rightarrow \Omega_{X_n^\# / W_n}^1$ est la dérivation à pôles logarithmiques canonique.
- (iii) $\phi(0)^i = p^{-i}F_n$ si $i \leq 0$ et 0 sinon.

On en déduit pour tout $j \leq p-1$ un objet $\mathcal{O}_{X_n^\# / W_n}(j)$ de $MF_{[-j,-j]}^\nabla(X_n^\#)$ appelé j -ième objet de Tate en posant :

$$\mathcal{O}_{X_n^\# / W_n}(j) := (\mathcal{O}_{X_n}, B^i(j) := B^{i+j}(0), d, \phi(j)^i := \phi(0)^{i+j}).$$

Remarques 4.2.

(i) Pour tout j , le coefficient syntomique associé à $\mathcal{O}_{X_n^\# / W_n}(j)$ est l'objet de Tate $K(j)$ de [1],1.7. Sa cohomologie syntomique est, sous les hypothèses 1.1, la même que celle définie par A. Besser ([5],6.1).

(ii) Pour $0 \leq j \leq p-1$, on vérifie immédiatement l'égalité :

$$\mathcal{S}_n(\mathcal{O}_{X_n^\# / W_n}(j), 0) = s_{n,X}^{\log}(j),$$

où le terme de droite est le complexe syntomique défini dans [18],5.

Théorème 4.3. *Supposons que $d = \dim X \leq p-2$. Alors, les objets de Tate $K(j)$ sont admissibles et leur cohomologie syntomique est donnée par:*

(i) Pour $0 \leq j \leq d$,

$$H_{syn}^i(\mathcal{X}, K(j)) = H^i(\mathcal{X}_{et}, s_{\mathbf{Q}_p}^{\log}(j)).$$

(ii) Pour $j < 0$,

$$H_{syn}^i(\mathcal{X}, K(j)) = 0.$$

(iii) Pour $j > d$,

$$H_{syn}^i(\mathcal{X}, K(j)) = H_{rig}^{i-1}(U/K).$$

Démonstration. L'admissibilité résulte de 2.5 et le calcul de la cohomologie syntomique résulte dans le cas (i) de la remarque 4.2,(ii) pour la première égalité et de [1],2.5,a via la remarque 4.2 (i) pour la seconde. Dans les cas (ii) et (iii) enfin, l'assertion est une conséquence de la proposition 3.2 (iii) et (iv) respectivement.

Nous rappelons à présent un résultat de Faltings ([11],6.2) sur les images directes supérieures de $F - T$ -cristaux (voir aussi [22]).

Proposition 4.4. *Soit $f : \mathcal{Y}^\# \rightarrow \mathcal{X}^\#$ un morphisme propre, log-lisse, lisse en codimension 1 de dimension relative $d_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} = d - d_{\mathcal{Y}}$ où la log-structure sur \mathcal{Y} est induite par un diviseur à croisements normaux simple $\mathcal{D}_{\mathcal{Y}}$ tel que $f^{-1}(\mathcal{D}_{\mathcal{Y}}) \subset \mathcal{D}$. Soit (E, Φ, B) un $F - T$ -cristal sur $\mathcal{Y}^\#$ de largeur inférieure ou égale à $w = b - a$ tel que $w + d_{\mathcal{Y}} \leq p - 2$. Alors pour tout entier i tel que $w + \min(d_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}}, i) \leq p - 2$, $R^i f_{cris,*} E \in MF_{[a,b+i]}^\nabla(\mathcal{X}^\#)$.*

Exemple 4.5. On suppose pour simplifier que $d = 1$. Soit A/U un schéma abélien se relevant au dessus de $\mathcal{X}^\#$ en un morphisme f comme en 4.4. Si $p > 3$ alors $\mathbf{D}(\mathcal{Y}) := R^1 f_{cris,*} \mathcal{O}_{\mathcal{Y}^\#/\mathcal{W}}$ est un $F - T$ -cristal admissible. L'isocrystal surconvergent qui lui est associé est $\mathbf{D}(A)^\dagger$ induisant sur le site cristallin le cristal de Dieudonné de A .

5. Cohomologie syntomique et cohomologie de Bloch-Kato.

5.1. Nous conservons les hypothèses et notations précédentes. Notons \bar{K} une clôture algébrique de K et $G = Gal(\bar{K}/K)$. Soit E un $F - T$ -cristal de largeur inférieure ou égale à $w = b - a$ tel que $w + d \leq p - 2$. Celui-ci correspond d'après 1.6 à un objet encore noté (E, Φ, B) de $MF_{[a,b]}^\nabla(\mathcal{X}^\#)$. Dans [11],II est défini un foncteur \mathbf{D} de la catégorie $MF_{[a,b]}^\nabla(\mathcal{X}^\#)$ dans celle des faisceaux finis étales localement constants sans p -torsion sur \mathcal{U}_K . Notons \mathbf{T} , le foncteur obtenu en associant à E :

$$\mathcal{H}om(\mathbf{D}(E), \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p).$$

Ce foncteur est soigneusement étudié dans [24],4. Celui-ci définit ([24],5) en particulier une flèche :

$$(T) : H_{syn}^i(\mathcal{X}, E) \rightarrow H_{et}^i(\mathcal{U}_K, \mathbf{T}(E)).$$

Remarque 5.2 La flèche (T) induit d'après 4.3 (iii), une flèche :

$$H_{rig}^{i-1}(U/K) \rightarrow H_{et}^i(\mathcal{U}_K, \mathbf{Q}_p).$$

Exemples 5.3.

$$(i) \mathbf{T}(\mathcal{O}_{X\#/W}(j)) = \mathbf{Q}_p(j).$$

(ii) Sous les hypothèses de 4.5, on note $f_0 : \mathcal{Y} \setminus \mathcal{D}_Y \rightarrow \mathcal{X} \setminus \mathcal{D}$. On a alors

$$\mathbf{T}(\mathbf{D}(\mathcal{Y})) = \mathbf{R}^1 f_{0,*} \mathbf{Q}_p$$

Nous rappelons à présent un résultat de Bannai ([1], 2.7 et Théorème 1) :

Proposition 5.4 *Soit $E = (E, \Phi, B)$ un $F - T$ -cristal admissible. Alors on a une suite exacte courte :*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \text{Ext}_{MF_K^a}^1(K(0), H_{rig}^i(U/K, E^\dagger)) &\rightarrow H_{syn}^{i+1}(\mathcal{X}, E) \\ &\rightarrow \text{Hom}_{MF_K^a}(K(0), H_{rig}^{i+1}(U/K, E^\dagger)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons d'autre part donner l'interprétation suivante des termes de la suites de 5.4 grâce à [6],4.5 (on notera au passage la faute de frappe dans [6],4.5 où il convient de remplacer H_e^1 par H_f^1) :

Lemme 5.5

(i) $\text{Ext}_{MF_K^a}^1(K(0), H_{rig}^i(U/K, E^\dagger)) \simeq H_f^1(K, V_i(E))$, la cohomologie définie dans [6],3.

$$(ii) \text{Hom}_{MF_K^a}(K(0), H_{rig}^{i+1}(U/K, E^\dagger)) \simeq V_{i+1}(E)^G.$$

Rappelons qu'un K -espace vectoriel de dimension finie D muni d'un endomorphisme Φ est mixte (respectivement pure de poids i) si les valeurs propres de Φ sont des nombres algébriques de valeurs absolues archimédiennes égales à $q^{i/2}$ où $i \in \mathbf{Z}$ dépend de la valeur propre (resp. est indépendant de la valeur propre). Si (D, Φ) est mixte, les valeurs i sont appelés les poids de (D, Φ) .

Corollaire 5.6 *Si $H_{rig}^{i+1}(U/K, E^\dagger)$ est mixte de poids non-nuls, on a*

$$H_{syn}^{i+1}(\mathcal{X}, E) \simeq H_f^1(K, V_i(E)).$$

Ceci est en particulier le cas dans les deux cas de figures suivants :

$$(i) E = \mathcal{O}_{X\#/W}(j) \text{ avec } 0 \leq j \leq p - 2 \text{ et } i > 2j - 1.$$

$$(ii) E = \mathcal{O}_{X/W}(j) \text{ avec } 0 \leq j \leq p - 2, \text{ le diviseur } \mathcal{D} \text{ est vide et } i \neq 2j - 1.$$

Dans ces deux derniers cas l'isomorphisme précédent s'écrit :

$$H^i(\mathcal{X}_{et}, s_{\mathbf{Q}_p}^{log}(j)) \simeq H_f^1(K, H_{et}^i(\mathcal{U}_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p(j))).$$

Démonstration. Si $H_{rig}^{i+1}(U/K, E^\dagger)$ est de poids non-nuls, alors $V_{i+1}(E)^G$ est clairement nul en utilisant le lemme 5.5 (ii), d'où la première assertion. Dans le cas (i), $H_{rig}^{i+1}(U/K)(j)$ est d'après [7], I mixte de poids compris dans l'intervalle $[i+1-2j, 2(i+1)-2j]$. L'assertion en résulte aussitôt. Dans le cas (ii), $H_{cris}^i(X/W) \otimes K(j)$ est pure de poids $i-2j$ d'après [8], 1, d'où l'assertion. Enfin l'isomorphisme résulte de [25] qui a montré que :

$$V_i(\mathcal{O}_{X^\# / W}(j)) \simeq H_{et}^i(\mathcal{U}_{\bar{K}}, \mathbf{Q}_p(j)).$$

Nous donnons à présent un exemple de calcul des poids dans le cas de coefficients non-triviaux.

Exemple 5.7. Soit S/k une courbe propre et lisse sur un corps fini de caractéristique p et $f : A \rightarrow S$ un schéma abélien. On note $\mathbf{D}(A)$ son module de Dieudonné cristallin associé (cf [3]). La suite spectrale :

$$H_{cris}^i(S/W, \mathbf{R}^j f_{cris,*} \mathcal{O}_{A/W}) \implies H_{cris}^{i+j}(A/W)$$

induit la suite exacte :

$$0 \rightarrow H_{cris}^1(S/W) \rightarrow H_{cris}^1(A/W) \rightarrow H_{cris}^0(S/W, \mathbf{D}(A)) \rightarrow$$

$$H_{cris}^2(S/W) \rightarrow E_1^2 \rightarrow H_{cris}^1(S/W, \mathbf{D}(A)) \rightarrow 0,$$

où $E_1^2 = Ker(H_{cris}^2(A/W) \rightarrow H^0(S/W, R^2 f_{cris,*} \mathcal{O}_{A/W}))$. On en déduit que :

$H_{cris}^0(S/W, \mathbf{D}(A)) \otimes K$ est mixte de poids $[1, 2]$.

$H_{cris}^1(S/W, \mathbf{D}(A)) \otimes K$ est pure de poids 2.

Enfin en utilisant la dualité de Poincaré cristalline ainsi que la dualité du module de Dieudonné ([3], 5), on montre que :

$H_{cris}^2(S/W, \mathbf{D}(A)) \otimes K$ est mixte de poids $[0, 1]$.

Nous calculons la cohomologie syntomique d'un groupe de Barsotti-Tate :

Exemple 5.8. Soient H/W un groupe de Barsotti-Tate, H_0/k sa réduction modulo p et H^*/W son dual de Cartier. A celui-ci est associé d'après [13], 0.2 un module filtré admissible dans $MF_{K,[0,1]}^a$:

$$D := H_{cris}^0(k/W, \mathbf{D}(H)) \otimes K,$$

où $\mathbf{D}(H)$ est le cristal de Dieudonné de H . La représentation cristalline lui correspondant est ([13], 3.7.3,(ii)) :

$$V := (T_p(H) \otimes \mathbf{Q}_p)^*,$$

où $T_p(H)$ est le module de Tate de H et $.^*$ consiste à prendre la représentation duale. La filtration de D est celle induite par la filtration de Hodge de $\mathbf{D}(H)$ ([3],3.3.5), i.e. :

$$0 \rightarrow Fil^1 D = \omega_{H_K} \rightarrow D \rightarrow Lie(H_K^*) \rightarrow 0.$$

Comme $Fil^0 D = D$, on déduit de [6],3.10 que $H_e^1(K, V) = 0$ et

$$V^G \simeq D^{\Phi=1}.$$

Comme $D = H_{cris}^0(k/W, \mathbf{D}(H)) \otimes K$ et $H_{cris}^i(k/W, \mathbf{D}(H)) = 0$ pour $i \geq 1$, la suite 3.2 (ii) induit une suite exacte :

$$0 \rightarrow H_{syn}^0(W, \mathbf{D}(H)) \rightarrow D \xrightarrow{1-\Phi} D \rightarrow H_{syn}^1(W, \mathbf{D}(H)) \rightarrow 0.$$

On a ainsi :

$$H_{syn}^0(W, \mathbf{D}(H)) \simeq V^G$$

et

$$H_{syn}^1(W, \mathbf{D}(H)) \simeq D/(1-\Phi)D \simeq H_f^1(K, V),$$

d'après [6],3.8.4, les autres groupes étant nuls pour $i \geq 2$.

Nous pouvons d'après [26],3.5, donner également l'expression suivante de la cohomologie syntomique de H/W :

$$H_{syn}^i(W, \mathbf{D}(H)) \simeq H_{SYN}^i(k, \mathcal{E}xt^1(H_0, \mathbf{Q}_p)),$$

où le terme de droite est calculé dans le gros site syntomique.

Nous terminons ce chapitre par une généralisation de la conjecture des points p -adiques de [23] au cas d'une variété ouverte et de coefficients non-triviaux. Nous rappelons tout d'abord le résultat suivant de Faltings ([11],5.3) :

Théorème 5.9. *Soit $E = (E, \Phi, B)$ un $F-T$ -cristal admissible. La représentation cristalline $V_i(E)$ associée au module filtré admissible $H_{rig}^i(U/K, E^\dagger)$ est :*

$$V_i(E) \simeq H_{et}^i(\mathcal{U}_{\bar{K}}, \mathbf{T}(E)).$$

Remarque 5.10. La preuve de ce résultat semble poser problème. Depuis Faltings a donné une nouvelle preuve (généralisée au cas semi-stable) dans [12]. On pourra par mesure de précaution, considérer le résultat précédent comme conjectural.

5.11 On se place sous les hypothèses 5.9. Considérons la suite spectrale de Hochschild-Serre associée à la représentation cristalline :

$$E_2^{i,j} = H^i(K, H_{et}^i(\mathcal{U}_{\bar{K}}, \mathbf{T}(E))) \implies E^{i+j} = H_{et}^{i+j}(\mathcal{U}_K, \mathbf{T}(E)).$$

Celle-ci induit une suite exacte :

$$0 \rightarrow H^1(K, V_i(E)) \rightarrow H_{et}^{i+1}(\mathcal{U}_K, \mathbf{T}(E)) \rightarrow V_i(E)^G.$$

En particulier, si $H_{rig}^{i+1}(U/K, E^\dagger)$ est mixte de poids non-nuls, on en déduit une injection :

$$H_{syn}^{i+1}(\mathcal{X}, E) \simeq H_f^1(K, V_i(E)) \hookrightarrow H^1(K, V_i(E)) \hookrightarrow H_{et}^{i+1}(\mathcal{U}_K, \mathbf{T}(E)).$$

Conjecture 5.12 L'injection précédente est la flèche (T) de Tsuji.

6. Cohomologie syntomique et représentation cristalline.

6.1. Soit \bar{W} la fermeture intégrale de W dans \bar{K} . Si K'/K est une extension finie de K , d'anneau des entiers $\mathcal{O}_{K'}$ un anneau de valuation discrète complet, alors \bar{W} correspond à la limite inductive des $\mathcal{O}_{K'}$. On note $\mathcal{O}_{K',n} = \mathcal{O}_{K'}/p^n$, $X_n^\# := X_n^\# \times_{W_n} \mathcal{O}_{K',n}$ et $\bar{\mathcal{X}}^\# = \mathcal{X}^\# \times_W \bar{W}$. Nous rappelons tout d'abord (en utilisant nos notations) un résultat de [25],3.4.4 (2) :

Proposition 6.2. *Pour tout i et j tel que $0 \leq i \leq j \leq d \leq p - 2$, on a :*

$$H_{syn}^i(\bar{\mathcal{X}}, \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}^\# / W}(j)) \simeq H_{et}^i(\mathcal{U}_{\bar{K}}, \mathbf{T}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}^\# / W}(j))).$$

Nous souhaitons généraliser cette formule au cas de coefficients non-constants en suivant la méthode décrite dans [25],3.3.5. Nous devons tout d'abord donner un sens précis au terme de gauche de l'isomorphisme.

6.3 Soit $E = (E, \Phi, B)$ un $F - T$ -cristal de largeur inférieure ou égale à $w = b - a$ tel que $w + d \leq p - 2$ et $(E_n, B_n^i, \Phi_n^i, \nabla_n)_{n \geq 0}$ le système compatible de modules filtrés appartenant à $MF_{[a,b]}^\nabla(X_n^\#)$ induit par E via le foncteur défini dans 1.5. Pour n et K'/K fixés, le morphisme $\pi_n' : X_n^\# \rightarrow X_n^\#$ induit un F -cristal sur $X_n^\# / W_n$:

$$E_n' := \pi_n'^*(E_n).$$

Si $X_n^\#$ se plonge dans un schéma $Z_n^\#/W_n$ lisse et si $D_n^\#$ est l'enveloppe à puissances divisées de $X_n^\#$ dans $Z_n^\#/W_n$ de p.d.-idéal \mathcal{J}_n' , alors la donnée du cristal E_n' est équivalente à celle de sa réalisation en l'épaississement $X_n^\# \hookrightarrow D_n^\#$, noté encore E_n' (qui est donc un $\mathcal{O}_{D_n^\#}$ -module) muni d'une connexion ∇_n' qui est l'image inverse de celle de E_n . Nous construisons à présent une telle donnée : Le schéma affine $\text{Spec } \mathcal{O}_{K',n}$ se plonge dans un schéma lisse $Y_n^\#/W_n$. Nous pouvons choisir ce plongement de manière compatible à n et K' . On pose alors $Z_n^\# = X_n^\# \times_{W_n} Y_n^\#$. Comme X_n/W_n est lisse, il existe un morphisme

$$h : D_n^\# \rightarrow X_n^\#,$$

qui induit un morphisme de p.d.-épaississements :

$$(X_n^\# \hookrightarrow D_n^\#) \rightarrow (X_n^\# = X_n^\#).$$

On montre alors de manière analogue à [4],6.5,6.6 que

$$E_n' \simeq h^* E_n \simeq E_n \otimes_{\mathcal{O}_{X_n}} \mathcal{O}_{D_n'},$$

indépendamment du choix de h .

De cette manière E_n' , en tant que produit tensoriel de modules filtrés, est muni naturellement d'une filtration :

$$B_n'^i = \sum_{r+s=i} B_n^r \otimes \mathcal{J}_n'^{[s]}.$$

Par Griffiths-transversalité de B_n^r et $\mathcal{J}_n'^{[s]}$, on déduit que la filtration $B_n'^i$ est elle aussi Griffith-transversale et on peut donc définir le complexe $B_n'^0 DR'(E_n')$ (cf 1.7).

Nous munissons à présent la filtration $(B_n'^i)$ d'un morphisme de Frobenius :

$$\Phi_n'^i : B_n'^i \rightarrow E_n',$$

lorsque $i \leq 0$.

Si $a \geq -(p-1)$, on vérifie que pour $i \leq 0$,

$$B_n'^i = \sum_{r=0}^{p-1} B_n^{-r-i} \otimes \mathcal{J}_n'^{[r]}$$

et on pose alors :

$$\Phi_n'^i := \sum_{r=0}^{p-1} \Phi_n^{-r-i} \otimes \Phi^r,$$

qui induit de manière analogue à 3.1 un morphisme de complexe :

$$\Phi^0 : B_n'^0 DR^\cdot(E'_n) \rightarrow DR^\cdot(E'_n).$$

On pose enfin :

$$\mathcal{S}_n(E', 0) := Cone(1 - \Phi^0, B_n'^0 DR^\cdot(E'_n) \rightarrow DR^\cdot(E'_n))[-1],$$

et également :

$$H_{syn}^i(\bar{\mathcal{X}}, \bar{E}) = \lim_{\leftarrow n} \lim_{\rightarrow K'/K} H^i(X'_{et}, \mathcal{S}_n(E'_n, 0)),$$

bien défini donc pour tout $F - T$ -cristal E de largeur inférieure ou égale à $w = b - a$ tel que $w + d \leq p - 2$ et $a \geq p - 1$. On a de plus de manière analogue à 3.2, une suite exacte longue de cohomologie :

$$(6.3.1) \dots \rightarrow H_{syn}^i(\bar{\mathcal{X}}, \bar{E}) \rightarrow H^i(\bar{\mathcal{X}}, B'^0 DR^\cdot(\bar{E})) \xrightarrow{(1 - \Phi^0)} H_{cris}^i(\bar{X}^\# / W, \bar{E}) \rightarrow \dots$$

Lemme 6.4. *Soit E un cristal sur $X^\# / W$, on a pour tout extension K' / K comme dans 6.1 et tout n l'isomorphisme :*

$$H_{cris}^*(X_n'^\# / W_n, \pi_n'^* E_n) \simeq H_{cris}^*(X_n^\# / W_n, E_n) \otimes H_{cris}^0(\mathcal{O}_{K', n} / W_n)$$

qui induit par passages successifs à la limite inductive relative aux extensions K' / K , puis limite projectives en n et enfin tensorisation par K , l'isomorphisme

$$H_{cris}^*(\bar{X}^\# / W, \pi'^* E) \otimes K \simeq H_{cris}^*(X^\# / W, E) \otimes B_{cris}^+.$$

Démonstration. La preuve est analogue à [15], III, 1.3 et consiste à appliquer le théorème de changement de base cristallin de [16], 2.5.

Théorème 6.5. *Soit E un $F - T$ -cristal de largeur inférieure ou égale à $w = b - a$ tel que $w + d \leq p - 2$ et $a \geq -(p - 1)$. Alors pour tout entier $i \geq 0$ tel que $b + i \leq 0$, on a un isomorphisme :*

$$H_{syn}^i(\bar{\mathcal{X}}, \bar{E}_K) \simeq V_i(E).$$

Démonstration. Tout d'abord, en notant $D_i = H_{cris}^i(X^\# / W, E) \otimes K$ et (B_i^r) sa filtration, on a une suite exacte courte :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \bigoplus_{r \geq 1} Fil^r B_{cris}^+ \otimes B_i^{-r+1} D_i \rightarrow \bigoplus_{r \geq 0} Fil^r B_{cris}^+ \otimes B_i^{-r} D_i \\ \rightarrow Fil^0(B_{cris}^+ \otimes D_i) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

où la première flèche associe à un élément $x \in \text{Fil}^r B_{\text{cris}}^+ \otimes B_i^{-r+1} D_i$, le couple $(x, -x)$ où le premier x est vu comme élément de $\text{Fil}^r B_{\text{cris}}^+ \otimes B_i^{-r} D_i$ et le second comme élément de $\text{Fil}^{r-1} B_{\text{cris}}^+ \otimes B_i^{-r+1} D_i$. De manière analogue, on a un triangle distingué :

$$\oplus_{r \geq 1} \text{Fil}^r DR(\mathcal{O}_{K',n}/W_n) \otimes B^{-r+1} DR(E_n) \rightarrow$$

$$\oplus_{r \geq 0} \text{Fil}^r DR(\mathcal{O}_{K',n}/W_n) \otimes B^{-r} DR(E_n) \rightarrow \text{Fil}^0(DR(\mathcal{O}_{K',n}/W_n) \otimes DR(E_n))$$

où le dernier terme peut aussi s'écrire d'après le lemme 6.4, $B^0(DR(E_n))$. Ce triangle distingué induit par passage à la cohomologie puis aux limites relatives aux K'/K et aux n la suite exacte courte ci-dessus (il suffit de vérifier que les deux premiers termes du triangles induisent par les opérations précédentes les deux premiers termes de la suite exacte, ce qui est clair). La suite 6.3.1 s'écrit donc après tensorisation par K sous la forme :

$$\dots H_{\text{syn}}^i(\bar{\mathcal{X}}, \bar{E}_K) \rightarrow \text{Fil}^0(B_{\text{cris}}^+ \otimes D_i) \xrightarrow{(1-\Phi^0)} B_{\text{cris}}^+ \otimes D_i \rightarrow \dots$$

Comme le $F-T$ -cristal E est dans $MF_{[a,b]}^\nabla$, on en déduit que son i -ème groupe de cohomologie est dans $MF_{[a,b+i]}$. Si $b+i \leq 0$, on a $\text{Fil}^1 D_i = 0$ et ainsi $\text{Fil}^0(B_{\text{cris}}^+ \otimes D_i) = \text{Fil}^0(B_{\text{cris}} \otimes D_i)$. Comme D_i est admissible, nous savons d'après [15], III, 2.3 que la flèche composée :

$$\text{Fil}^0(B_{\text{cris}} \otimes D_i) \xrightarrow{(1-\Phi^0)} B_{\text{cris}}^+ \otimes D_i \hookrightarrow B_{\text{cris}} \otimes D_i$$

est surjective. La première flèche l'est donc également. Comme d'autre part la deuxième flèche est injective, on en déduit que le noyau de la flèche composée, i.e. la représentation cristalline associée à D_i n'est autre que le noyau de la première flèche, i.e. $H_{\text{syn}}^i(\bar{\mathcal{X}}, \bar{E}_K)$, ce qui achève la démonstration.

7. Cohomologie des pentes.

Comme l'a montré [19], cohomologie syntomique, cohomologie des cycles évanescents p -adiques et cohomologie des pentes sont liés. Nous donnons ici un candidat pour la cohomologie des pentes à coefficients et montrons quelques unes de ses propriétés.

7.1. Nous conservons hypothèses et notations de 1.1 dans tout ce chapitre et reprenons la construction de [27]. Soit E^\dagger un F -isocristal sur U surconvergent le long de D . Celui-ci correspond à la donnée d'un $j^\dagger \mathcal{O}_{\mathcal{X}_K^{an}}$ -module à connexion intégrable et d'une action de frobenius Φ σ -linéaire et horizontale par rapport

à cette connexion. On note $DR^\cdot(E^\dagger)$, le complexe de de Rham associé à E^\dagger . Celui-ci est muni d'une action de Frobenius induite par celle de E^\dagger . On note :

$$\mathcal{P}(E^\dagger, r) := \text{Cone}(1 - p^{-r}\Phi, DR^\cdot(E^\dagger))[-1],$$

et sa cohomologie :

$$H^*(U/K, \mathcal{P}(E^\dagger, r)),$$

si bien qu'on obtient une suite exacte longue :

$$\dots H^i(U/K, \mathcal{P}(E^\dagger, r)) \rightarrow H_{rig}^i(U/K, E^\dagger) \xrightarrow{(1-p^{-r}\Phi)} H_{rig}^i(U/K, E^\dagger) \rightarrow \dots$$

Notons \bar{k} une clôture algébrique de k , $K^{nr} := \text{Frac}W(\bar{k})$ et \bar{E}^\dagger le F -isocrystal sur $U_{\bar{k}}$ déduit de E^\dagger par changement de base. Rappelons le résultat de [27] :

Proposition 7.2. *Si E^\dagger provient d'un F -cristal non-dégénéré sur $X^\# / W$, alors la suite exacte longue précédente induit une suite exacte courte :*

$$0 \rightarrow H^i(U_{\bar{k}}, \mathcal{P}(\bar{E}^\dagger, r)) \rightarrow H_{rig}^i(U_{\bar{k}}/K^{nr}, \bar{E}^\dagger) \xrightarrow{(1-p^{-r}\Phi)} H_{rig}^i(U_{\bar{k}}/K^{nr}, \bar{E}^\dagger) \rightarrow 0.$$

De plus le groupe $H^i(U_{\bar{k}}, \mathcal{P}(\bar{E}^\dagger, r))$ est $\phi := \Phi^{[K:\mathbf{Q}_p]}$ -stable et ses valeurs propres par ϕ sont égales aux valeurs propres de ϕ sur $H_{rig}^i(U_{\bar{k}}/K^{nr}, \bar{E}^\dagger)$ de valuation p -adique égale à q^r .

Corollaire 7.3. *Si E^\dagger provient d'un $F - T$ -cristal admissible et $V_i(E)$ est la représentation cristalline associée au module filtré $(D_i = H_{rig}^i(U/K, E^\dagger), B_i)$, on a une suite exacte :*

$$0 \rightarrow V_i(E)^I \rightarrow H^i(U_{\bar{k}}, \mathcal{P}(\bar{E}^\dagger, 0)) \rightarrow D_i \otimes K^{nr} / B_i^0 \otimes K^{nr} \rightarrow H_e^1(K^{nr}, V_i(E)) \rightarrow 0$$

où $I \subset G$ est le sous-groupe d'inertie.

Démonstration. L'assertion résulte de 7.2 et [6], 3.10.

Remarque 7.4. Si $D_i = H_{rig}^i(U/K, E^\dagger)$ est mixte de poids non-nuls alors 1 n'est pas une valeur propre de $\Phi^{[K:\mathbf{Q}_p]}$ et donc pas une valeur propre de Φ . On en déduit que $D_i^{\Phi=1} = 0 = D_i / \text{Im}(\Phi - 1)$. Ainsi, dans ce cas :

$$H^i(U, \mathcal{P}(E^\dagger, 0)) = 0.$$

Ce n'est bien sûr pas le cas de $H^i(U_{\bar{k}}, \mathcal{P}(\bar{E}^\dagger, 0))$.

Bibliographie

- [1] Bannai K., Rigid syntomic cohomology and p -adic polylogarithms, preprint de l'Université de Tokyo (2000).
- [2] Berthelot P., Cohomologie rigide et cohomologie à support propre, Première partie (version provisoire 1991), Prépublication IRMAR 96-03, Université de Rennes (1996).
- [3] Berthelot P., Breen L. et Messing W., Théorie de Dieudonné cristalline II, Lecture Notes in Math. 930, Springer Verlag (1982).
- [4] Berthelot P. et Ogus A., Notes on crystalline cohomology. Princeton University Press, Princeton, 1978.
- [5] Besser A., Syntomic regulators and p -adic integration I : Rigid syntomic regulators, à paraître dans Israel J. Math..
- [6] Bloch, S. et Kato, K., L -functions and Tamagawa numbers of motives. The Grothendieck Festschrift, Vol. I, 333–400, Progr. Math., 86, Birkhauser Boston, Boston, MA, 1990.
- [7] Chiarellotto B., Weights in rigid cohomology. Applications to unipotent F -isocrystals, Ann. scient. Ec. Norm. Sup, 4^e série, t. 31, 1998, p. 683 à 715.
- [8] Chiarellotto B. et Le Stum B., Sur la pureté de la cohomologie cristalline, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 326, Série I, p.961-963, 1998.
- [9] Chiarellotto B. et Le Stum B., A comparison theorem for weights, en préparation.
- [10] Deligne P, Théorie de Hodge. I. (French) Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, pp. 425–430. Gauthier-Villars, Paris, 1971.
- [11] Faltings G., Crystalline cohomology and p -adic Galois representations, in Jun-Ichi Igusa editor, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, p. 25-80. The John Hopkins University Press (1989).
- [12] Faltings G., Almost étale extensions, preprint du Max Planck Institut Bonn (1998).
- [13] Fontaine J.-M., Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate. (French) Journées de Géométrie Algébrique de Rennes. (Rennes, 1978), Vol. III, pp. 3–80, Astérisque, 65, Soc. Math. France, Paris, 1979.
- [14] Fontaine J.-M. et Laffaille G., Construction de représentations p -adiques. Ann. Sci. de l'E.N.S., 15:547-608 (1982).

- [15] Fontaine J.-M. et Messing W., p -adic periods and p -adic étale cohomology. Contemporary Math. 67 (1987), 179-207.
- [16] Hyodo O. et Kato K., Crystalline cohomology with logarithmic poles, in Périodes p -adiques, Astérisque No.223 (1994).
- [17] Kato K., Logarithmic structures of Fontaine-Illusie. Algebraic analysis, geometry, and number theory, Proc. JAMI Inaugur. Conf., Baltimore/MD (USA) 1988, 191-224 (1989).
- [18] Kato K., Semi-stable reduction and p -adic étale cohomology, in Périodes p -adiques, Astérisque No.223 (1994).
- [19] Kurihara M., A note on p -adic étale cohomology, Proc Japan Acad., 63, Ser. A (1987).
- [20] Le Stum B. et Trihan F., Log-cristaux et surconvergence, preprint de l'Université de Rennes1 (1999).
- [21] Ogus A. : " F -isocrystals and de Rham cohomology II-Convergent isocrystals ", Duke Math. J., Vol 51, No 4 (1984).
- [22] Ogus A., F -crystals, Griffiths transversality, and the Hodge decomposition, Astérisque 221 (1994).
- [23] Schneider P., p -adic points of motives, in Motives, Proc. Sympos. Pure Math. 55,Pt2, Amer. Math. Soc., Providence, 1994, 225-249.
- [24] Tsuji T., Syntomic complexes and p -adic vanishing cycles, J. reine angew. Math. 472 (1996),69-138.
- [25] Tsuji T., p -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case, Invent. math. 137, 233-411 (1999).
- [26] Trihan F., Fonction L unité d'un groupe de Barsotti-Tate, manuscripta math. 96, 397-419 (1998).
- [27] Trihan F.,Zéros et pôles des fonctions L de F -isocristaux, à paraître au CRAS.

University of Tokyo. Graduate School of Mathematical Sciences. Komaba, Tokyo, Japan.

e-mail: trihan@ms.u-tokyo.ac.jp

UTMS

- 2000–61 Kenichi Bannai: *On the p -adic realization of elliptic polylogarithms for CM-elliptic curves.*
- 2000–62 J. Cheng, D.H. Xu and M. Yamamoto: *The local conditional stability estimate for an inverse contact problem in the elasticity.*
- 2000–63 Takeo Noda and Takashi Tsuboi: *Regular projectively Anosov flows without compact leaves.*
- 2000–64 Nariya Kawazumi: *Weierstrass points and Morita-Mumford classes on hyperelliptic mapping class groups.*
- 2000–65 Eiji Ogasa: *n -dimensional links, their components, and their band-sums.*
- 2000–66 J. Cheng, Y.C. Hon and M. Yamamoto: *A conditional stability estimate for an inverse Neumann boundary problem.*
- 2000–67 Kazuya Kato: *P -adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms.*
- 2001–1 André Martinez, Shu Nakamura and Vania Sordoni: *Phase space tunneling in multistate scattering.*
- 2001–2 Zhi Lü and R.E. Stong: *Classifying involutions fixing $\mathbb{R}P^{odd} \sqcup P(h, i)$ up to equivariant cobordism.*
- 2001–3 Go Yamamoto: *Algebraic structures on quasi-primary states in superconformal algebras.*
- 2001–4 J. Cheng, G. Nakamura and M. Yamamoto: *A global conformal uniqueness in the anisotropic inverse boundary value problem.*
- 2001–5 Fabien Trihan: *Cohomologie syntomique des $F - T$ -cristaux.*

The Graduate School of Mathematical Sciences was established in the University of Tokyo in April, 1992. Formerly there were two departments of mathematics in the University of Tokyo: one in the Faculty of Science and the other in the College of Arts and Sciences. All faculty members of these two departments have moved to the new graduate school, as well as several members of the Department of Pure and Applied Sciences in the College of Arts and Sciences. In January, 1993, the preprint series of the former two departments of mathematics were unified as the Preprint Series of the Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo. For the information about the preprint series, please write to the preprint series office.

ADDRESS:

Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo
3–8–1 Komaba Meguro-ku, Tokyo 153, JAPAN
TEL +81-3-5465-7001 FAX +81-3-5465-7012