数理・情報一般　「数学の現在・過去・未来」

２００４年5月１０日、１７日

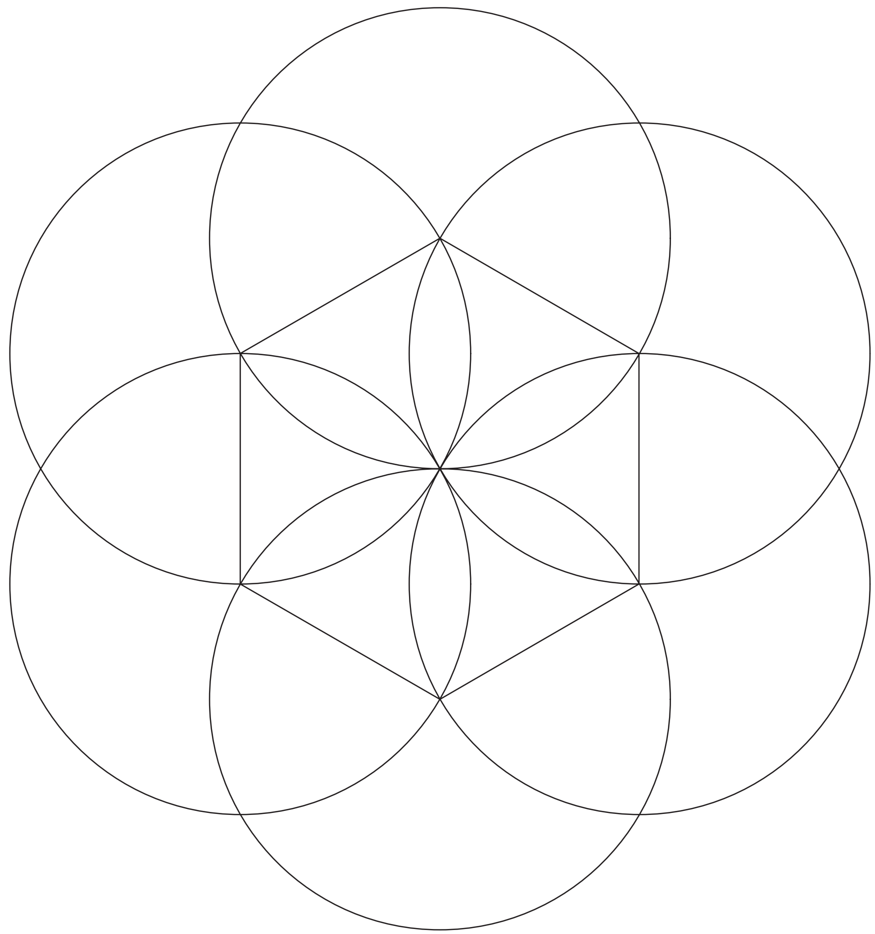
円周からなる図形

坪井　俊

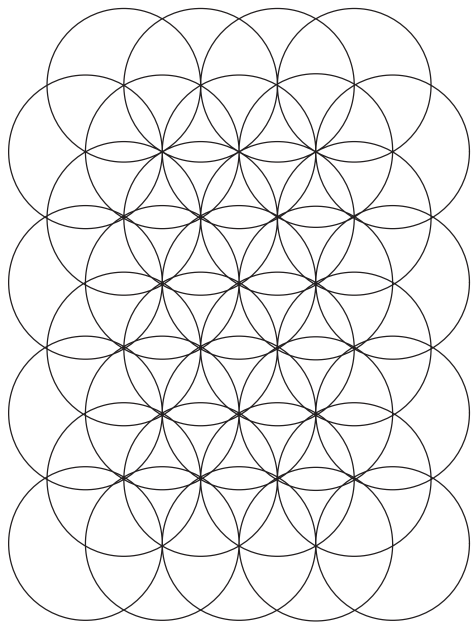
定規とコンパスは図形を描くときの基本的な道具である。
初めてコンパスに触れたときの印象はどのようなものであったか？

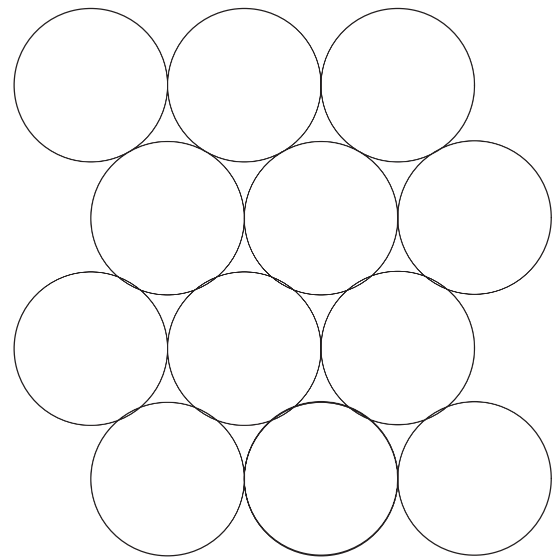
コンパスは円を描く道具である。
２０世紀を代表する数学者の一人であるグロタンディエク(1928–) は、円周率を３であると確信していた時期があったといっている。

**　円周を、それを書いたコンパスで等分していくとちょうど６個に分割される。**



　さらにコンパスで円を描き続けると平面を埋め尽くす図形が得られる。

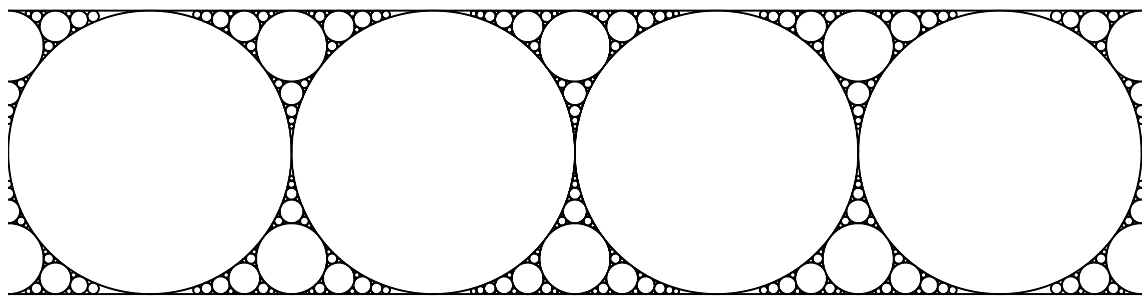


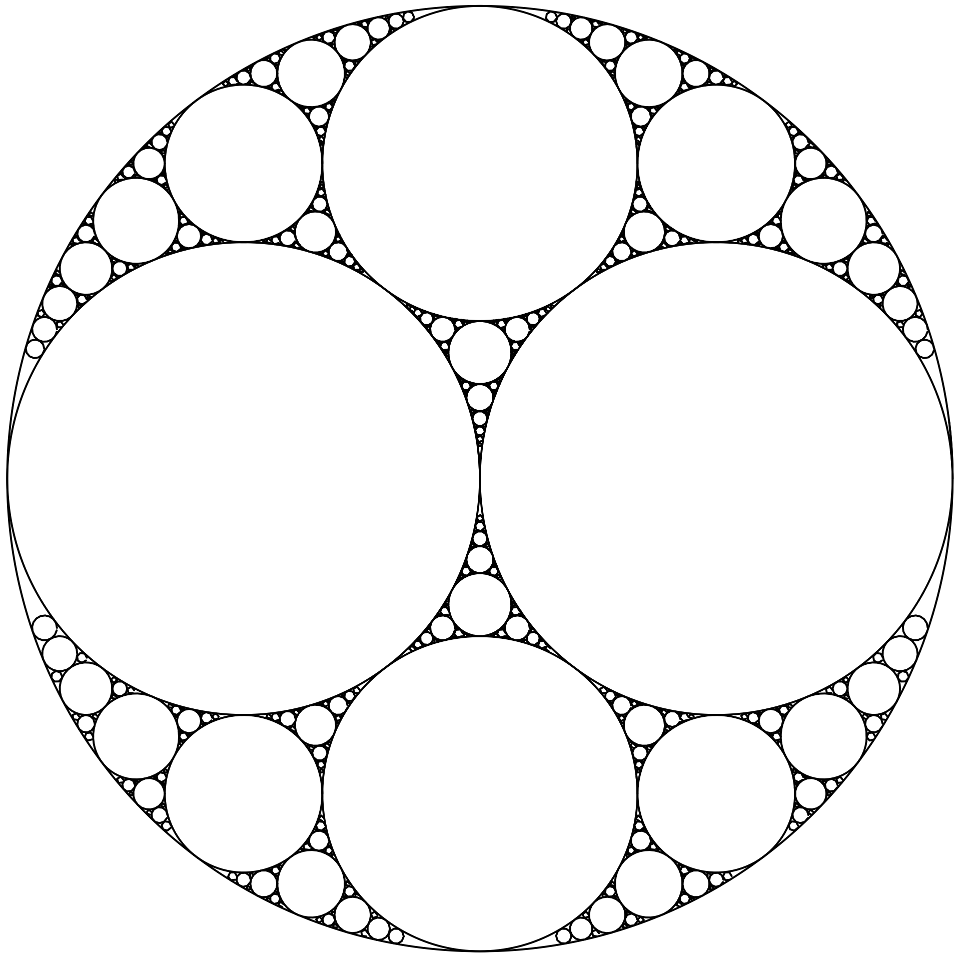


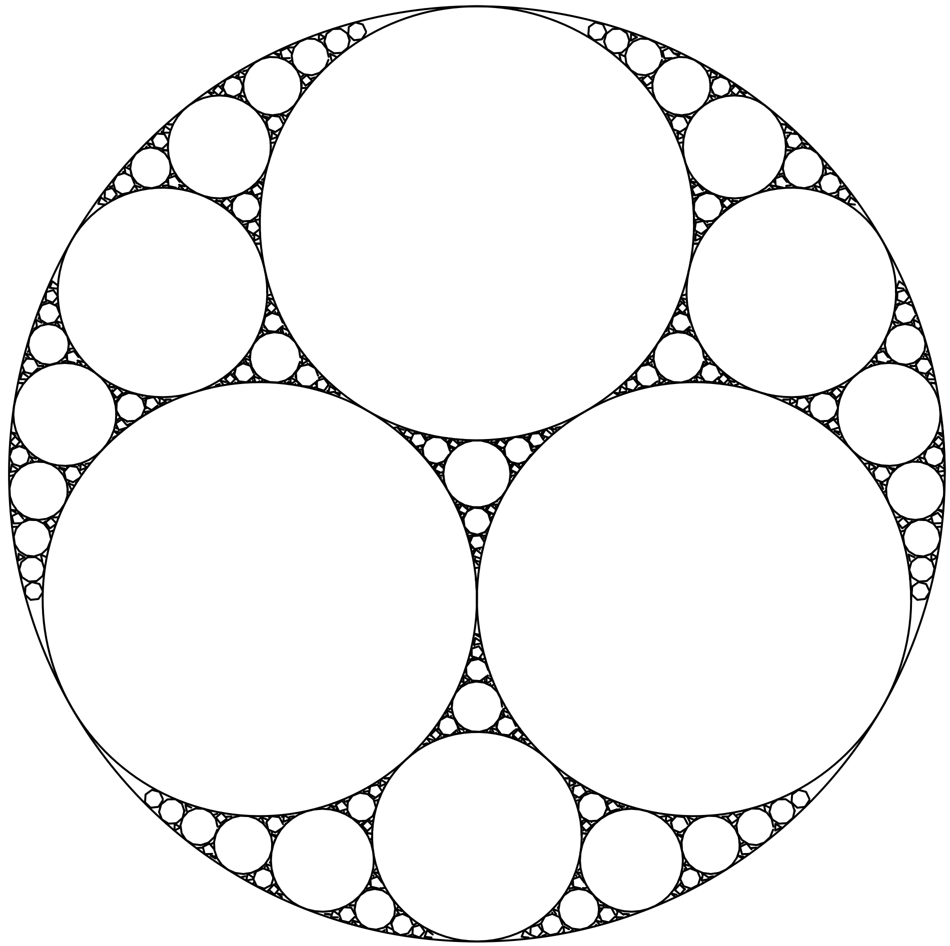
この講義で考えたいのは、次のような図形である．

接する円A　接する円B　接する円C

接する円ソフト　接する円出力結果







　この図形は、いたるところ似たような形をしている。

　図形の書き方は、外接する２つの円に対し、その両方に接する円を描く。この後は、３つの円に対し、接する円を次々に描き加えていく。３つの円を定めると後の描き方は一意的に定まっていることに注意しよう。

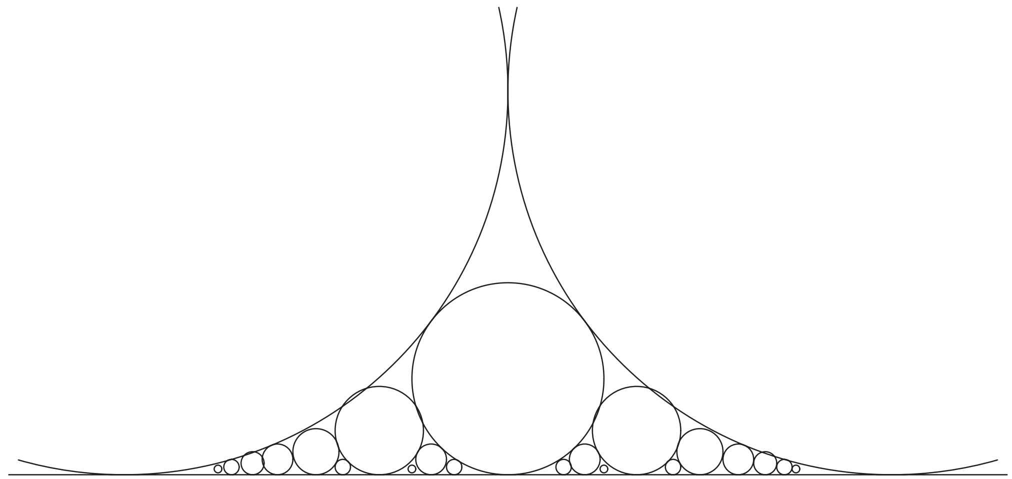
　うまく外接する２つの円の例として、$\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}$が、$m_1 n_2 - m_2 n_1 = \pm 1,\ n_1 > 0,\ n_2 > 0$を満たすときの、$(\frac{m_1}{n_1}, \frac{1}{2{n_1}^2})$を中心とする半径$\frac{1}{2{n_1}^2}$の円と、
$(\frac{m_2}{n_2}, \frac{1}{2{n_2}^2})$を中心とする半径$\frac{1}{2{n_2}^2}$の円がある。

実際、中心の間の距離は、

$$\sqrt{(\frac{m_1}{n_1}-\frac{m_2}{n_2})^2+(\frac{1}{2{n_1}^2}-\frac{1}{2{n_2}^2})^2} = \sqrt{(\frac{1}{n_1 n_2})^2+(\frac{1}{2{n_1}^2}-\frac{1}{2{n_2}^2})^2}$$
$$= \frac{1}{2{n_1}^2}+\frac{1}{2{n_2}^2}$$

これは、x軸上のファレイ(1766-1826)の列で接する円である。

$$(\frac{0}{1},\frac{1}{1})$$
$$(\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{1})$$
$$(\frac{0}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{1})$$
$$(\frac{0}{1},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{1}{1})$$
$$(\frac{0}{1},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{2}{7},\frac{1}{3},\frac{3}{8},\frac{2}{5},\frac{3}{7},\frac{1}{2},\frac{4}{7},\frac{3}{5},\frac{5}{8},\frac{2}{3},\frac{5}{7},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{1}{1})$$



ファレイの図形は、接する円A の一部分として現れている。

２つずつ接する３つの円から始めて３円に接する円を付け加えて得られる図形Gをアポロニアン・ガスケットApollonian Gasket と呼ぶ。ギリシャ時代からよく研究されてきた図形である。アポロニウス(BC262–BC190).

我々が主題とする図形Gに戻ると、それは次の性質を持つ。

・２つの点は曲線で結ぶことができる。（弧状連結）

・この図形の点には２つの円の接点になるものとそうでないものの２通りある。２つの円の接点になる点の個数は自然数の個数と同じであるが、そうでない点の個数は実数の個数と同じである。

・閉集合である。Gの上の収束点列はGの点に収束する。

・どの点に対してもその点に収束する接点の列がある。

・２つの接点は有限個の円を通る曲線で結ぶことが出来る。

・２つの円は交わらないか高々１点で接する。

・２つずつ接する３つの円がある。さらにそのような３つの円に対して、その３つに接する円が２つある。２つの円（の接点）は、２つずつ接する３つの円の接点について、反対側にある。

・Gの各点に対し、その点を通るG上の単純閉曲線がある。Gの単純閉曲線でGを分割しないものは、円である。

この講義の目的は、このような図形はひとつしかないことを示すこと、およびこの図形から自分自身への全単射であるような連続写像の全体が、うまく記述できることを示すことである。

Gの性質の中でひとつ面白いことは、図形Gの中で円をGの上の単純閉曲線の中でGを分割しないものとして再定義することが出来ることである。もちろんGにおける２つの円は交わりを持たないか高々１点で接する。

　このような考え方でいわゆるシェルピンスキーのガスケットという図形を解釈できる。

　シェルピンスキーのガスケットの構成

　これは、われわれの図形の一部分として登場している。

　接する円C

　実際、われわれの図形Gを３つの点で切り離すと、２つのシェルピンスキーのガスケットに分解される。

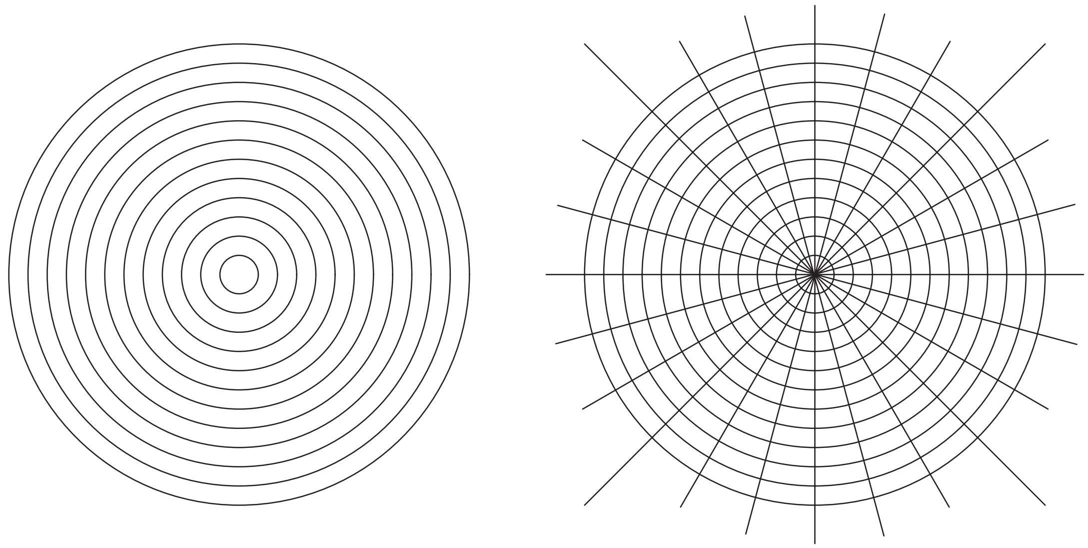
G_1, G_2が上の性質を満たす図形であるとする。そうするとそれぞれの中に「２つずつ接する３つの円」がある。これを固定すると、その３つの接点の間の対応が定まる。さらにそれぞれに対して、２つの円が定まるが新たに得られる６個の接点についての対応も定まる。この５個の円に対して、３つの円に接する円が６個あるが、その１８個の接点についての対応が定まる。このようにして次々に接点の対応を定めることが出来る。

このようにして得られる接点は、現れた円の上で稠密である。さらに「２つの接点は有限個の円を通る曲線で結ぶことが出来る」ことからこのようにしてすべての接点が得られることが導かれる。

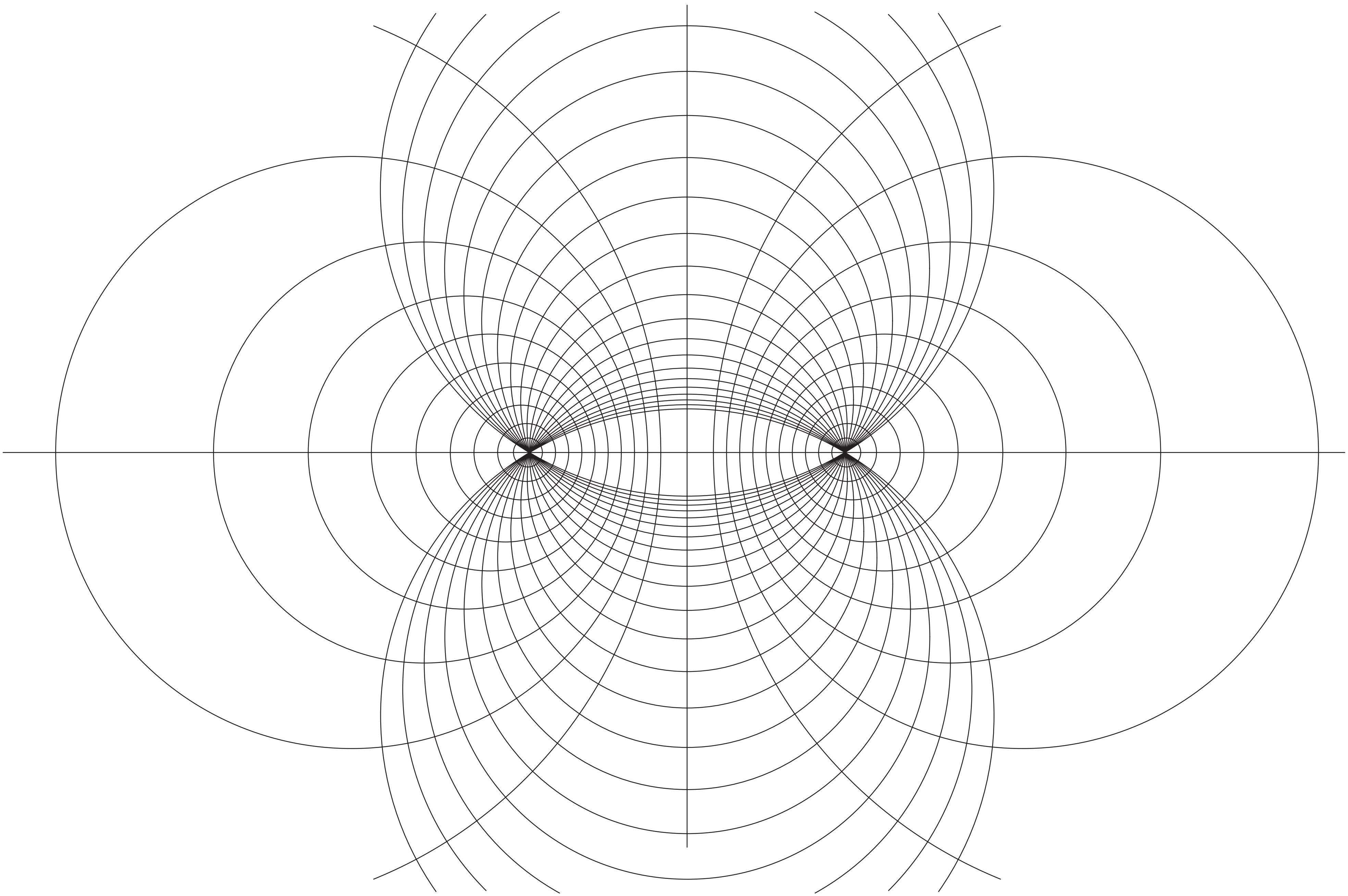
これらの接点の集積点全体の集合がG_1, G_2であり、G_1とG_2の間には連続な全単射が定まることも示される。

　ここでいったことが、上の性質を満たすGはひとつしかないということである。具体的に作っていった２つの図形に対して、一方を他方に移す写像はどのようなものであるかを考えよう。

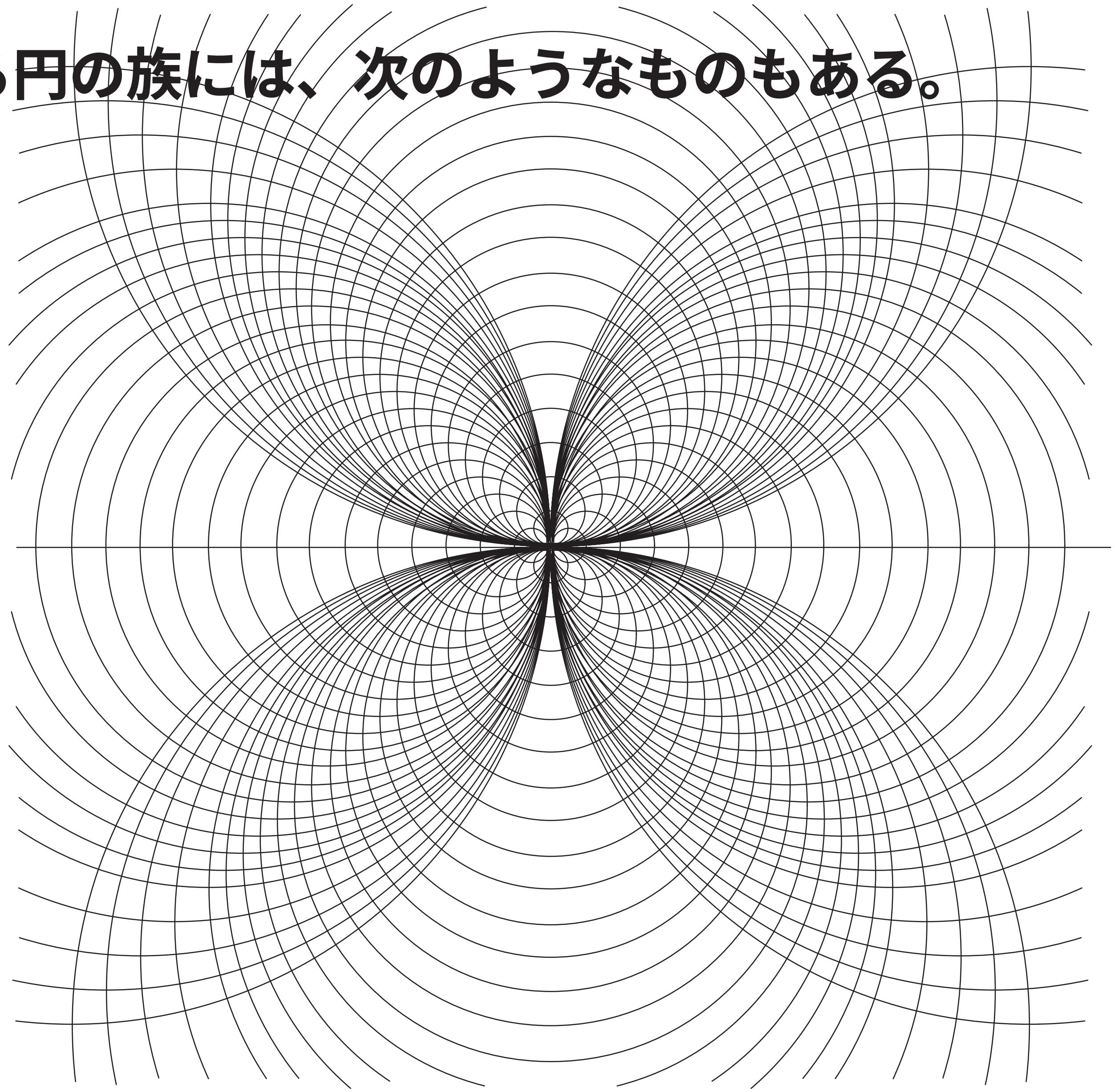
さて、円周からなる図形の最も単純なものは、同心円である。



２点が与えられると、その２点を同じ角度で見込む弧、そしてアポロニウスの円が描かれる。アポロニウスの円は、２点への距離の比が一定であるような点の軌跡である。この２つの円の族は直交している。



直交している円の族には、次のようなものもある。



円を表記するのは、方程式

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

が普通であるが、これからの目的のためには、複素数$z = x + y\sqrt{-1}$を使って、$\alpha = a + b\sqrt{-1}$に対し、$|z-\alpha| = r$、すなわち

$$(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})-r^2=0$$

$$z\overline{z}-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z+\alpha\overline{\alpha}-r^2=0$$

が使いやすい。

それは１次分数変換が「円または直線」を「円または直線」に写すからである。

こんどはa, b, c, dを複素数として、

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

という写像を考える。

$$z_1 \longmapsto \frac{a_1 z_1 + b_1}{c_1 z_1 + d_1}$$

$$z_2 \longmapsto \frac{a_2 z_2 + b_2}{c_2 z_2 + d_2}$$

を続けて行うと

$$z_1 \longmapsto z_2 = \frac{a_1 z_1 + b_1}{c_1 z_1 + d_1} \longmapsto \frac{a_2 z_2 + b_2}{c_2 z_2 + d_2} = \frac{a_2 \frac{a_1 z_1 + b_1}{c_1 z_1 + d_1} + b_2}{c_2 \frac{a_1 z_1 + b_1}{c_1 z_1 + d_1} + d_2}$$

$$\frac{a_2\dfrac{a_1z_1+b_1}{c_1z_1+d_1}+b_2}{c_2\dfrac{a_1z_1+b_1}{c_1z_1+d_1}+d_2} = \frac{a_2(a_1z_1+b_1)+b_2(c_1z_1+d_1)}{c_2(a_1z_1+b_1)+d_2(c_1z_1+d_1)}$$
$$= \frac{(a_2a_1+b_2c_1)z_1+(a_2b_1+b_2d_1)}{(c_2a_1+d_2c_1)z_1+(c_2b_1+d_2d_1)}$$

であるが、この最後の分数変換の係数はちょうど行列の積

$$\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2a_1+b_2c_1 & a_2b_1+b_2d_1 \\ c_2a_1+d_2c_1 & c_2b_1+d_2d_1 \end{pmatrix}$$

の成分と一致している。２×２行列が複素数に左から作用しているということである。

但し、１次分数変換を複素数に作用させるとき、複素数の他にもう1点∞を考え、分母が0になるときには、∞に写るとし、∞

は$\dfrac{a}{b}$に写るとする。

$$\frac{a(-\frac{d}{c})+b}{c(-\frac{d}{c})+d}=\infty, \qquad \frac{a\infty+b}{c\infty+d}=\frac{a}{b}$$

さて、１次分数変換$z\longmapsto\dfrac{az+b}{cz+d}$では、常に$ad-bc\neq 0$とする。

このとき、逆写像があり、$z\longmapsto\dfrac{dz-b}{-cz+a}$となる。

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$の逆行列は、$\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$であるが、$0$でないスカラー行列は、１次分数変換としては恒等写像である。

１次分数変換が、円または直線を円または直線に写すことは、次のようにして確かめられる。

まず、$c = 0$ のとき、

$$z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$$

は、原点を中心とする $|\frac{a}{d}|$ 倍の相似変換、$\arg\frac{a}{d}$ の回転、$\frac{b}{d}$ だけの平行移動を行ったものだから、円を円に写す。（直線は直線に写す。）

$c \neq 0$のとき、$z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$は

$$z \longmapsto cz+d \longmapsto \frac{\frac{a}{c}(cz+d) - \dfrac{ad-bc}{c}}{cz+d} = \frac{az+b}{cz+d}$$

と分解されるが、$w = cz+d$について$w \longmapsto \dfrac{\frac{a}{c}w - \dfrac{ad-bc}{c}}{w}$は、再び

$$w \longmapsto \frac{1}{w} \longmapsto -\frac{ad-bc}{c}\frac{1}{w} + \frac{a}{c} = \frac{\frac{a}{c}w - \dfrac{ad-bc}{c}}{w}$$

と分解される。

$z \longmapsto az+b$の形のものについては、円または直線を円または直線に写すから、$z \longmapsto \frac{1}{z}$が、この性質を持てば良い。

$w = \dfrac{1}{z}$と置く。zが、$|z - \alpha| = r$、すなわち

$$z\overline{z} - \alpha\overline{z} - \overline{\alpha}z + \alpha\overline{\alpha} - r^2 = 0$$

を満たすならば、

$$\frac{1}{w}\frac{1}{\overline{w}} - \alpha\frac{1}{\overline{w}} - \overline{\alpha}\frac{1}{w} + \alpha\overline{\alpha} - r^2 = 0$$

を満たす。従って、

$$1 - \alpha w - \overline{\alpha w} + (\alpha\overline{\alpha} - r^2)w\overline{w} = 0$$

$\alpha\overline{\alpha} - r^2 \neq 0$ならば、

$$w\overline{w} - \frac{\alpha}{\alpha\overline{\alpha} - r^2}w - \frac{\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha} - r^2}\overline{w} + \frac{1}{\alpha\overline{\alpha} - r^2} = 0$$

は円を表し、$\alpha\overline{\alpha} - r^2 = 0$ならば、直線を表す。

実は、$s,\ t$ を実数として、$sz\overline{z}-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z+t=0$ は、$\alpha\overline{\alpha}>st$ のとき、円または直線を表す。この式に $z=\dfrac{1}{w}$ を代入して整理すると、

$$s-\alpha w-\overline{\alpha w}+tw\overline{w}=0$$

を得、これは円または直線を表す。

複素数平面上の直線は、複素数に ∞ を加えた空間では、∞ を通る円であると考えられる。

アポロニウスの円の族について、１次分数変換で与えた２点の内の１点を無限遠点 ∞ に写すと、同心円の族に写る。

１点で接する円の族をについて、この１点を無限遠点 ∞ に写すと、平行線の族に写る。

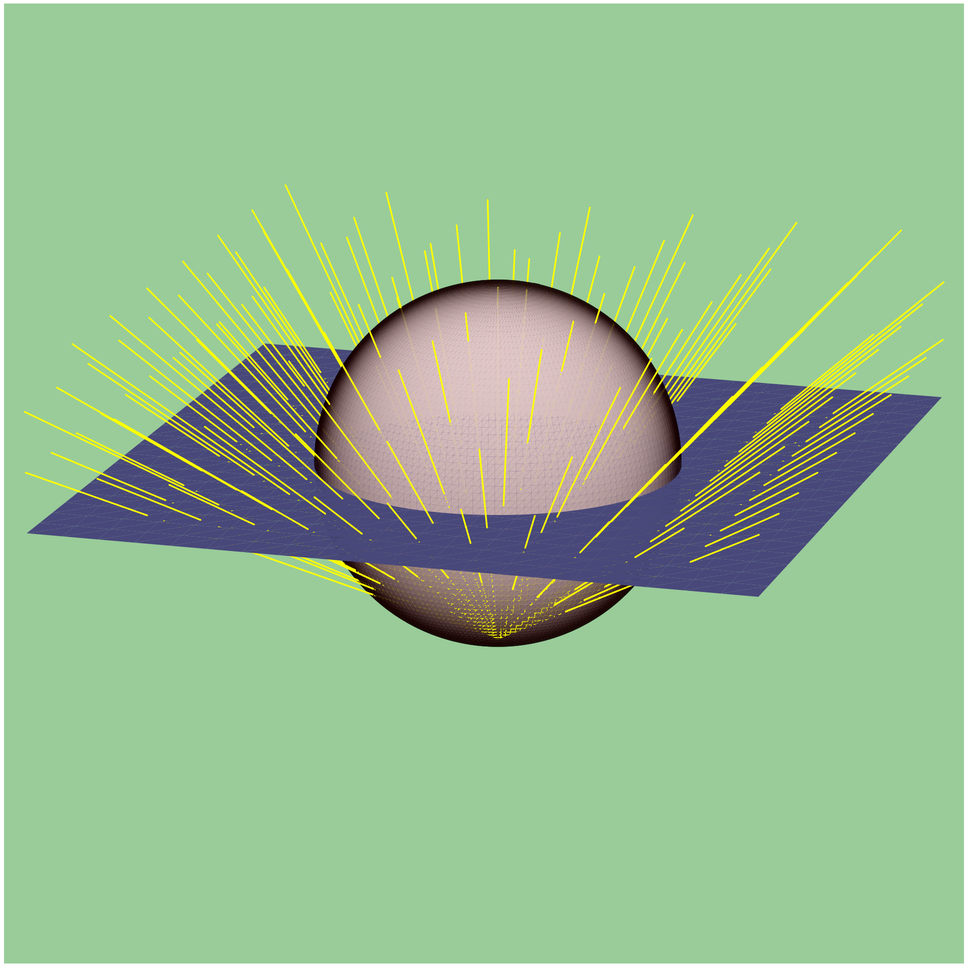
実際、ステレオグラフィック射影という空間の単位球面から平面への写像がある。

これは、(x,y,z) ($x^2+y^2+z^2=1$) が、南極点 $(0,0,-1)$ と異なるとき、$(0,0,-1)$, (x,y,z) を結ぶ直線と、xy 平面との交点 $(X,Y,0)$ が得られるが、この点 (X,Y) を (x,y,z) に対応させるものである。

式で書けば

$$(x,y,z)\longmapsto (X,Y)=(\frac{x}{z+1},\frac{y}{z+1})$$

である。

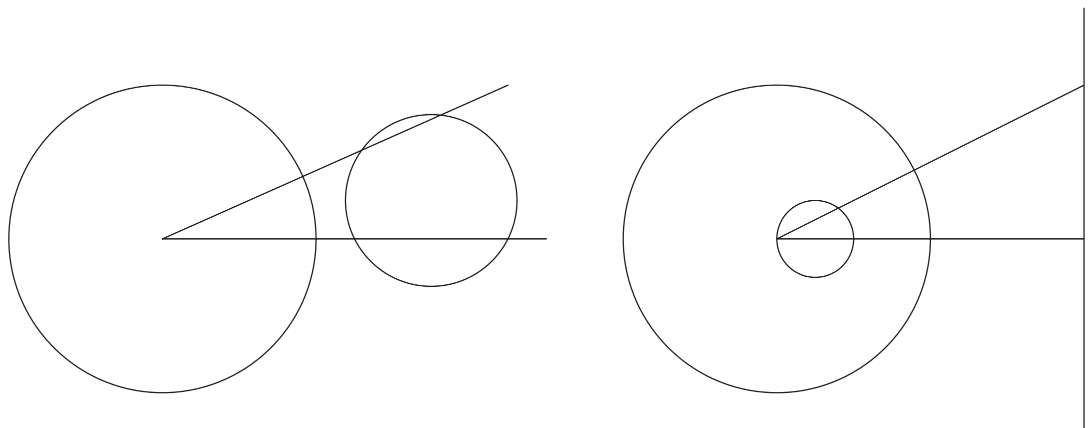


　このステレオグラフィック射影は、球面上の円を平面上の円または直線に写す。

実は $z \longmapsto \dfrac{1}{\bar{z}}$ は平面上の単位円についての反転である。

半径が R の円についての反転とは、円の中心からの半直線上の点を、同じ半直線上の距離の積が R^2 となる点に写すものである。

方冪の定理から、反転は「円または直線」を「円または直線」に写す。（直線については直角三角形と円の関係。）



反転は、球面に対しても同じように定義できる。球面についての反転が、「平面または球面」を「平面または球面」写すことは方冪定理の絵を２円の中心を通る直線の周りに回転してみればわかる。（直線の場合は直線への垂線の周りに回転する。）

空間内の円は２つの球面の交わりとして表されるから、空間内の円を球面についての反転で写すと、円または直線となる。

さて、ステレオグラフィック射影は、球面を$(0, 0, -1)$を中心として$\dfrac{1}{2}$倍の相似変換をした後、$(0, 0, -1)$を中心とする半径１の球面について反転を行ったものである。従って、ステレオグラフィック射影は、球面上の円を平面上の円または直線に写す。

さて、面白いのは、次のことである。

球面から球面への全単射 $f : S^2 \longrightarrow S^2$ について、f, f^{-1} ともに連続とする。このとき次の命題が成立する。

命題１。「f が、円を円に写すならば、f は複素共役および１次分数変換から引き起こされる写像である。」

これを示すためのヒントとして、平面のアフィン写像を考えよう。今度は、再び実数の座標 (x, y) をもつ平面を考える。a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2 を実数として、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

の形の写像をアフィン写像と呼ぶ。常に $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ とする。

このとき、逆写像は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

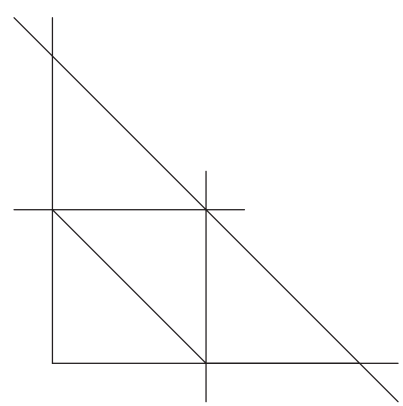
である。平面のアフィン写像は直線を直線に写す。

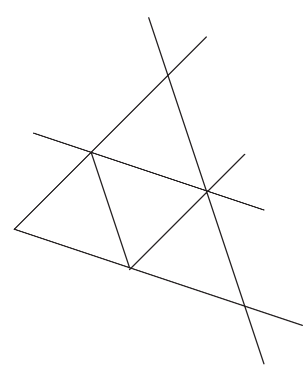
平面から平面への全単射 f について、f, f^{-1} ともに連続とする。このとき次の命題が成立する。

命題２。「f が、直線を直線に写すならば、f はアフィン写像である。」

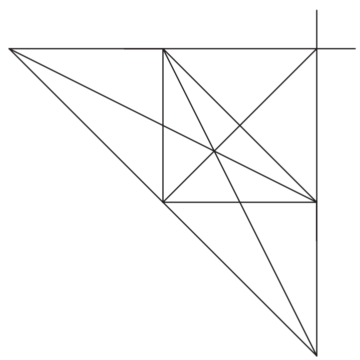
これは次のように示される。キーポイントは平行線は平行線に写されるということである。

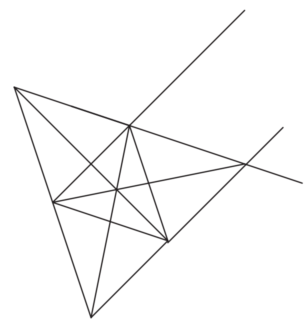
まずひとつの３角形OPQを固定する。$f(O)f(P)f(Q)$は３角形となる。（$f(O)$, $f(P)$, $f(Q)$が１直線上にあるとすると、もともとO, P, Qが１直線上にあることになる。）このとき、直線OPは直線$f(O)f(P)$に写り、直線OQは直線$f(O)f(Q)$に写る。さらに、平行線を引いてOP, OQを２辺とする平行４辺形$OPRQ$をつくると、これはfで$f(O)f(P)$, $f(O)f(Q)$を２辺とする平行４辺形$f(O)f(P)f(R)f(Q)$に写る。





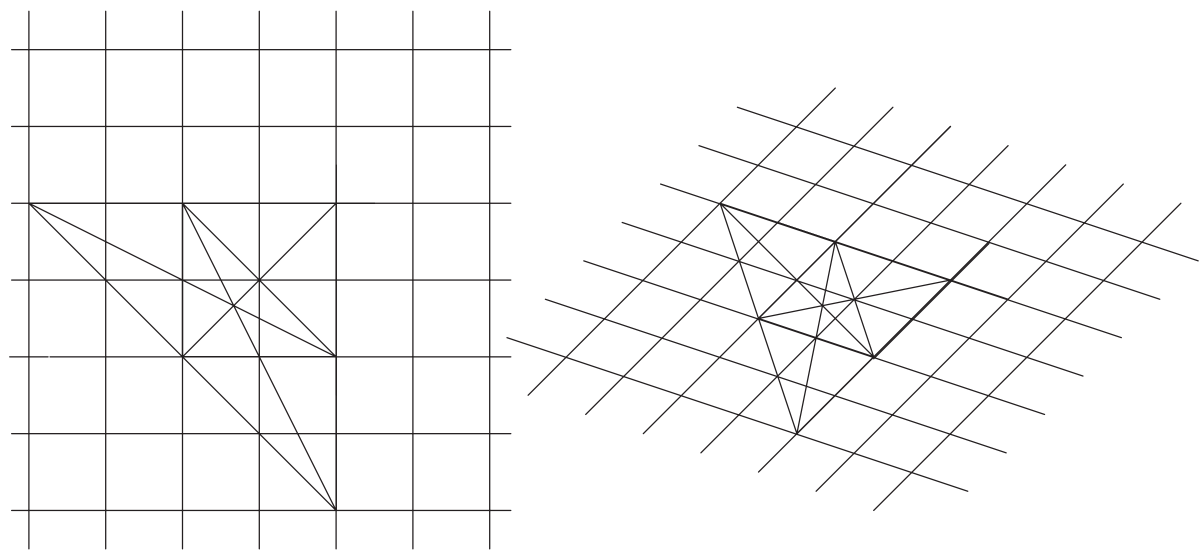
また、Oを中心として３角形OPQを２倍に相似変換した３角形$OP'Q'$を考えると、$P'Q'$はRを通るPQに平行な直線だから、$f(P')f(Q')$も$f(R)$を通る$f(P)f(Q)$に平行な直線となり、$f(O)f(P')f(Q')$は、$f(O)$を中心として３角形$f(O)f(P)f(Q)$を２倍に相似変換した３角形である。これを繰り返して、OP, OQで生成される格子は、$f(O)f(P),\ f(O)f(Q)$で生成される格子に写される事がわかる。





また、平行４辺形の対角線の交点であるPQの中点は、$f(P)f(Q)$の中点に写る。このことは、格子を半分の長さにした格子同士も移りあうことを示している。このようにして格子の目を細かくす

ると、f はその格子の上でアフィン写像となっている。f は連続と仮定したから、平面から平面へのアフィン写像である。



命題３.「f がさらに円を円に写すならば、f は相似変換となる。」(裏返しになることもある。)

ヒント：正方形からなる格子が平行四辺形からなる格子に写るが、格子点を通る円の像が円であるためには、平行四辺形は正方形でないといけない。

命題１は、ひとつの点で接している円の族について考察すれば、同様に導かれる．

これまでの議論は、「１次分数変換は円を円に写すこと」、本当は、「１次分数変換は球面（リーマン球面）に作用していて、球面上の円を円に写すこと」、を説明したものである。また、逆に円を円に写す対応は（向きを保てば）１次分数変換となる。１次分数変換の全体は、２行２列の正則複素行列をスカラー倍になっている行列は同じものと考えたもの$PGL(2;\mathrm{C})$と同一視される。

平面上あるいは球面上に描いたわれわれの図形G_1, G_2は、１次分数変換で写りあう。

すなわち、G_1, G_2のなかの「２つずつ接する３つの円」を１次分数変換$z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$で写すと、そのあと、３つの円に接する円は、この１次分数変換により、３つの円に接する円に写され、そ

の接点は接点に写っている。これを繰り返して、この１次分数変換がG_1, G_2の接点の間の対応を与えていることがわかる。

接する円A, 接する円B, または接する円Cのどれかを固定し、それをG_0と考える。連続な全単射$G_0 \longrightarrow G_0$も同じように、１次分数変換であらわされる。
$G_0 \longrightarrow G_0$の連続な全単射の個数は、３つの円の取り方で、自然数の個数と同じであることがわかる。（たとえば、円周Cについて、円周から円周への連続な全単射の個数は、回転だけでも実数の個数と同じだけあることがわかるが、実際ちょうど実数の個数とちょうど同じだけであることが知られている。）

G_0として、接する円A の形のものを考えると、これがファレイの図形を含んでいることを前に注意した。

ファレイの図形は、整数を係数とする１次分数変換で不変である。
整数を係数とする１次分数変換全体は $PSL(2;\mathrm{Z})$ **と書かれる。**
従って、 G_0 **自体も整数を係数とする１次分数変換で不変であることがわかる。**

ファレイの図形を含む G_0 **は、** $\dfrac{\sqrt{-1}}{2}$ **を中心とする** $\dfrac{1}{2}$ **回転**

$$z \longmapsto -z+\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{-1}z+1}{0z-\sqrt{-1}}$$

でも不変である。
少し考えると、この場合の連続な全単射 $G_0 \longrightarrow G_0$ **は、整数を係数とする１次分数変換と** $z \longmapsto -z+\sqrt{-1}$ **および複素共役を何回か合成したものとして書くことができることがわかる。**

群の構造もわかり、$A_4 \underset{\mathbf{Z}_3}{*} D_6$ のように書かれる。

球面上に描いた図形とその変形は以下のようである。

球面上の円周の族

球面上の円周の族２

$\dfrac{1}{2}$ 回転対称な図形

$\dfrac{1}{3}$ 回転対称な図形

正四面体対称な図形の芯

レポートの課題例。

講義のノートと感想

接する円を実際に描いてみる。

ステレオグラフィック射影が円を円に写すことを示す。

「球面の円を円に写す同相写像は、複素共役および１次分数変換から引き起こされる写像であること」を示す。