数理・情報一般「数学の現在・過去・未来」

- ４月１９日
  - 数理・情報一般「数学の現在・過去・未来」について。次のページを参照。

    `http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/users/surijoho/`

  - 「２次元球面と３次元球面」について
    目標は次のこと。"ポアンカレ予想に現れる３次元球面はどのような空間かを２次元の球面との比較を通じて理解する。"
  - ２次元球面について
    「地図と曲率」
    「平面の１点コンパクト化、ステレオグラフ射影」
- ４月２６日
  - ３次元球面
    「２次元複素ベクトル空間と３次元球面」
    「ホップ・ファイブレーション」
    「ポアンカレ予想の主張、幾何化予想、ペレルマンの方法」

２次元球面と３次元球面

２００２年、２００３年にペレルマンがポアンカレ予想の解決をアナウンスし、２００６年までにほぼその証明の正しさが検証された。２０１０年3月１８日、クレイ数学研究所は、ペレルマンにミレニアム賞の授与を発表した。

The Clay Mathematics Institute hereby awards the Millennium Prize for resolution of the Poincare conjecture to Grigoriy Perelman.

`http://www.claymath.org/poincare/millenniumPrizeFull.pdf`

ポアンカレ予想は、約１００年前ポアンカレが述べた、「３次元単連結閉多様体は３次元球面に同相であろう」という予想である。

３次元の空間の原点からの距離が R であるような点の全体を（原点を中心とする）半径 R の（２次元）球面とよぶ。

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

という等式を満たす点 (x,y,z) の全体である。$\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=R^2\}$ と書く。３次元空間内の球面は、中心の座標と半径で定まるが互いに **相似** である。球面の形は、「一通りに定まっている」と考えられる。

地図を作る

狭い場所、大学の構内の地図は、平面上に書かれる。数学的には、相似比（縮尺）１万分の１で１０００メートルは１０ｃｍになる。少し広い範囲、例えば東京都の地図を平面上に相似に書くことは出来ない。地球が丸いからである。

$a\ km$ の長さは、中心角 $\dfrac{a}{20000}\pi$ ラジアンあるいは $\dfrac{180a}{20000}$ 度に対応し、地球の半径は $\dfrac{20000}{\pi}$ だから、$\{1-\cos(\dfrac{1}{2}\dfrac{a}{20000}\pi)\}\dfrac{20000}{\pi}\ km$ 中央が両端よりも高くなる。

$$\begin{aligned}
& \{1-\cos(\frac{1}{2}\frac{a}{20000}\pi)\}\frac{20000}{\pi} \\
= & \{1-(1-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\frac{a}{20000}\pi)^2+\frac{1}{4!}(\frac{1}{2}\frac{a}{20000}\pi)^4-\cdots)\}\frac{20000}{\pi} \\
= & \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\frac{a}{20000}\pi)^2\frac{20000}{\pi}-\cdots \\
= & \frac{\pi}{160000}a^2+\cdots=(0.0000196\cdots)a^2+\cdots
\end{aligned}$$

その高さは、$a=1\ (km)$ ならば、約 $2\ cm$, $a=10\ (km)$ ならば、約 $2\ m$, $a=100\ (km)$ ならば、約 $200\ m$ である。１万分の１の地図ならば、$0.002mm$, $0.2\ mm$, $2\ cm$ 浮き上がっている。日本の地図となると、相似に描いたものは使いにくい。

球面の形のままにするからこうなるので、少し紙をねじったりすれば、何とかなるかもしれないと考えてみるべきであるが、それもできない。ただし、どうやっても出来ないことを証明するには少し「数学の考え方」が必要である。

１．まず、「地図が描けるとは何か」を定義する。

２．そのときに成り立つべき性質を示す。

３．その性質が成り立たないことを示す。

そのために、「１−１．地図の描ける対象を定める。」これは、各点の近くへの平面の円板 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2}<1\}$ からの全単射があるもの、すなわち、局所的に座標がとれるものとする。そういうものを曲面、あるいは２次元多様体とよぶ。

「１−２．座標を取ったときに、２点間の距離が定まる。」

実際には、「接線を持つ曲線」の長さが定まり、２点の距離は、２点を結ぶ曲線の長さの最小値として定まっている。

曲線 c は、座標で $(x(t),y(t))$ と書かれる。$(x(t),y(t))$ が **平面上の** 曲線ならば、$\displaystyle\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t$ が $\{(x(t),y(t)) \mid t\in[a,b]\}$ の長さ。一般には、

$$\int_a^b\sqrt{E(x(t),y(t))x'(t)^2+2F(x(t),y(t))x'(t)y'(t)+G(x(t),y(t))y'(t)^2}\mathrm{d}t$$

の形に表される。この $(u,v) \longmapsto E(x,y)u^2+2F(x,y)uv+G(x,y)v^2$ が曲面上の局所的な距離を定めている（第１基本形式、あるいはリーマン計量と呼ぶ）。ここに座標 (x,y) で定まる関数 $E(x,y)$, $F(x,y)$, $G(x,y)$ が現れているが、平面の時は、$E(x,y)$, $G(x,y)$ は恒等的に 1, $F(x,y)$ は恒等的に 0 である。一般の曲面については、座標により変化する関数を係数とする u, v の２次式が u^2+v^2 のかわりに現れるということである。

十分近い２点に対し、２点を結ぶ曲線のなかで、その長さが最小となるものが存在し、**測地線** と呼ばれる。測地線は、「測地線の２階常微分方程式」を満たす曲線となる。測地線は、平面の場合は **直線**、球面の場合は **大円** となる。

距離が定まるから、曲面上の１点を決めて、その点を中心とする半径が r の円が、その点から距離が r の点の全体として定義される。これは長さを持つ曲線となる。半径 r の円の周の長さを $\ell(r)$ とする。

平面に対しては、$\ell(r)=2\pi r$, 半径 R の球面に対しては、$\ell(r)=2\pi R\sin\dfrac{r}{R}$ である。

$$K=\frac{3!}{2\pi}\lim_{r\to 0}\frac{2\pi r-\ell(r)}{r^3}$$

を考えると、平面に対しては、$K=0$, 単位球面に対しては、

$$\begin{aligned}K=&\ \frac{3!}{2\pi}\lim_{r\to 0}\frac{2\pi r-2\pi R\sin\dfrac{r}{R}}{r^3}\\ =&\ \frac{3!}{2\pi}\lim_{r\to 0}\frac{2\pi r-2\pi R(\dfrac{r}{R}-\dfrac{1}{3!}\dfrac{r^3}{R^3}+\dfrac{1}{5!}\dfrac{r^5}{R^5}-\cdots)}{r^3}=\frac{1}{R^2}\end{aligned}$$

となる。K は、リーマン計量、つまり、曲線の長さの計算に現れる $E(x,y)$, $F(x,y)$, $G(x,y)$ を与えれば、各点で定まる値であり、**ガウス曲率** と呼ばれる。

（平面内の１次元の曲線の曲率は、各点において曲線をよく近似する円周の半径（曲率半径）の逆数である。空間内の曲面のガウス曲率は曲面の曲がり方が極大極小となる２つの方向についての曲率の積であり、球面の場合に $\dfrac{1}{R^2}$ となる。ガウスはこのように定義した曲率が、曲面上の曲線の長さにしか依存しないことを証明し、これを驚異の定理と呼んだ。）

もしも、平面に正確な地図を書くことが出来れば、その地図の上で、測地線は直線であり、距離は、平面上の距離の（縮尺による）定数倍であるから、ガウス曲率は 0 でなければならない。一方、球面のガウス曲率は、1 であるから、球面の地図を平面上に相似に描くことはできない。

球面は平面の１点コンパクト化

球面と平面は、異なる形をしている。従って、地球の表面全体の地図を平面に描くことは出来ない。その理由は何であろうか。

２つの図形 X, Y が、同じ形であること、あるいは、異なる形をしていることには、**定義** が必要。

X, Y が同相であることを次のように定義する。すなわち、連続写像 $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow X$ で、$g \circ f : X \longrightarrow X$ が X の恒等写像、$f \circ g : Y \longrightarrow Y$ が Y の恒等写像になるものが存在するとき、X, Y は同相であるという。

同相であることを示すためには、このような連続写像（同相写像と呼ぶ）f あるいは g を構成する必要がある。

同相ではないことを示すためには、背理法をつかう。すなわち、同相写像が存在すると仮定して、矛盾を導く。

球面と平面は、異なる形をしていることは、次のようにしてわかる。

球面は３次元空間の有界閉集合であり、球面上の実数値連続関数には、最大値、最小値が存在することを用いる。

球面から平面への同相写像 f が存在したとする。平面上の点の原点からの距離 d は、平面上の連続関数である。この関数は、最大値を持たない。$d \circ f$ は、球面上の連続関数となり、球面上の実数値連続関数には、最大値が存在することに矛盾する。

ところが、球面から北極を除いた図形は平面と同相である。

これはステレオグラフ射影によって与えられる。

DIMENSIONS のビデオで説明している。

http://faculty.ms.u-tokyo.ac.jp/users/dim_jp

からのリンクを参照。ビデオの第１章、第２章参照。

ステレオグラフ射影を式で書くには、$(0, 0, 1)$, (x, y, z), $(u, v, 0)$ が直線上にあるという式を書けばよい。すなわち、ある実数 t に対し、$(x, y, z - 1) = t(u, v, -1)$ と書いて、(u, v) を (x, y, z) で表す、あるいは、(x, y, z) を (u, v) で表せばよい。$t = 1 - z$ だから、$u = \dfrac{x}{t} = \dfrac{x}{1-z}$, $v = \dfrac{y}{t} = \dfrac{y}{1-z}$. つまり、

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{1-z} \\ \dfrac{y}{1-z} \end{pmatrix}$$

また、$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ だから、$(tu)^2 + (tv)^2 + (1-t)^2 = 1$ であり、$t^2u^2 + t^2v^2 + t^2 - 2t = 0$ を得る。従って、$t = \dfrac{2}{1 + u^2 + v^2}$ であり、$x = tu = \dfrac{2u}{1 + u^2 + v^2}$, $y = tv = \dfrac{2v}{1 + u^2 + v^2}$, $z = 1 - t = \dfrac{1 - u^2 + v^2}{1 + u^2 + v^2}$. つまり、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2u}{1 + u^2 + v^2} \\ \dfrac{2u}{1 + u^2 + v^2} \\ \dfrac{1 - u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2} \end{pmatrix}$$

この $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ に写す写像、$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に写す写像がともに連続だから、球面から北極 $(0, 0, 1)$ を除いた図形は平面と同相である。

このステレオグラフ射影の様子はビデオで見るとおりである。

このステレオグラフ射影は、角度を保存し、球面上の円周を、平面上の円周または直線に写す。

これは、ビデオの第９章に説明されているが、ここでは、円または球面についての反転という写像の性質を用いて説明する。

円についての反転

まず、平面の円についての反転は次のような平面から円の中心を除いた図形からそれ自身への写像である。

中心 O、半径 R の円に対して、この円についての反転とは、O とは異なる点 P に対し、半直線 OP 上の点 P' で、$OP \cdot OP' = R^2$ となる点を対応させる写像である。これは、円周上の点は動かさず、円の内部の中心 O' と異なる点と、円の外部の点を対応させており、２度繰り返すと恒等写像となる。

円についての反転が、円を円に写す（中心を通る円周は直線に、直線は中心を通る円周に写す）ことを示そう。

点 Q を中心とする別の円 c を描き、O から c に交わる半直線を描き、A, B で交わるとする。反転した点を A', B' とする。$OA : OB = OB' : OA'$ である。c 上の点 D に対し、半直線 OD は c と E で交わるとする。$OB : OE = OD : OA = OA' : OD'$ だから、D' は c を O を中心として $\dfrac{OB'}{OA} = \dfrac{OA'}{OB}$ 倍の相似変換をして得られる円周上にある。

中心を通る円周は直線に、直線は中心を通る円周に写すことも確かめられる。c が O を通るとする。半直線 OQ が、c と再び A で交わるとし、反転した点を A' とする。OA は c の直径である。c 上の点 D に対し、$OA : OD = OD' : OA'$ である。従って $\angle OA'D' = \angle ODA$ は直角である。従って c 上の点を反転した点は、A' で半直線 OA に直角に交わる直線上にある。

直線に対しては、それに垂線をおろしてその点を B とし、その点を反転した点を B' とすれば、直線上の点を反転した点は、OB' を直径とする円周上にある。

球面についての反転

３次元空間の球面についての反転は次のような空間から球面の中心を除いた図形からそれ自身への写像である。

中心 O、半径 R の球面に対して、この球面についての反転とは、O とは異なる点 P に対し、半直線 OP 上の点 P' で、$OP \cdot OP' = R^2$ となる点を対応させる写像である。これは、円周上の点は動かさず、円の内部の中心 O' と異なる点と、円の外部

の点を対応させており、２度繰り返すと恒等写像となる。

球面についての反転が、球面を球面に写す（中心を通る球面は平面に、平面は中心を通る球面に写す）ことが、円についての反転の性質からすぐにわかる。

実際、円についての反転の説明の状況を、直線 OQ の周りに回転してみればよいのである。

さらに、球面についての反転が、円を円に写すことがわかる。円は２つの球面の交線としてあらわされ、２つの球面は球面に写されるのだから、交線は円は２つの球面の交線である円に写される。

反転は、n 次元ユークリッド空間の $n-1$ 次元球面に対して同様に定義され、球面または平面を球面または平面に、円または直線を円または直線にうつす写像となる。

最後に、ステレオグラフ射影は、北極を中心とする球面についての反転である。従って、球面上の円を平面上の円または直線に写す。

２次元複素ベクトル空間と３次元球面

半径 R の３次元球面は、４次元ユークリッド空間の原点からの距離が R であるような点の全体として定義される。すなわち、

$$x^2+y^2+u^2+v^2=R^2$$

という等式を満たす点 (x,y,u,v) の全体である。
$\{(x,y,u,v)\in\mathbf{R}^4 \mid x^2+y^2+u^2+v^2=R^2\}$ と書く。

複素数 $z=x+yi, w=u+vi$ を用いると、$x^2+y^2+u^2+v^2=R^2$ は、$z\overline{z}+w\overline{w}=R^2$ と書かれる。$\{(z,w)\in\mathbf{C}^2 \mid z\overline{z}+w\overline{w}=R^2\}$ と書く。$\mathbf{C}^2$ は、２次元複素ベクトル空間である。

絶対値が１の複素数は $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ と書かれる。

複素数は、絶対値 r と偏角 θ で、あらわすこともできる。ずなわち、$z=x+yi$ に対し、$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{z\overline{z}}$ とおき、実軸となす角度を θ ラジアンとすると、$z=x+yi=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$ と書かれる。

複素数の掛け算は、$z=x+yi, w=u+vi$ に対し、$zw=(xu-yv)+(xv+yu)i$ で定義されるが、絶対値と偏角については、$z=x+yi=r(\cos\theta+i\sin\theta)=re^{i\theta}$, $w=u+vi=\ell(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\ell e^{i\varphi}$, に対し、

$$\begin{aligned}
& r(\cos\theta+i\sin\theta)\ell(\cos\varphi+i\sin\varphi) \\
= \ & r\ell(\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi)+i(\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\cos\varphi) \\
= \ & r\ell(\cos\theta\cos\varphi-\sin\theta\sin\varphi)+i(\cos\theta\sin\varphi+\sin\theta\cos\varphi) \\
= \ & r\ell\ e^{i(\theta+\varphi)}
\end{aligned}$$

積の絶対値は絶対値の積であり、積の偏角は、偏角の和となることがわかる。

複素数 w に絶対値１の複素数 $e^{i\theta}$ を掛けることは、偏角に θ が加えることであるから、複素数平面の原点を中心とする角度 θ だけの回転である。

２次元複素ベクトル空間 $\mathbf{C}^2$ の点 (z, w) と複素数 α に対し、$\alpha(z, w) = (\alpha z, \alpha w)$ でスカラー倍が定義される。α の絶対値が１で、$\alpha = e^{i\psi}$ のとき、$e^{i\psi}$ 倍することは、各成分を ψ だけ回転することである。

３次元球面については、$(z, w) \in \mathbf{C}^2$ が、３次元球面上の点ならば、$e^{i\psi}(z, w) = (e^{i\psi}z, e^{i\psi}w)$ も３次元球面上の点である。実際、$z\overline{z} + w\overline{w} = R^2$ ならば、

$$e^{i\psi}z\overline{e^{i\psi}z} + e^{i\psi}w\overline{e^{i\psi}w} = e^{i\psi}ze^{-i\psi}\overline{z} + e^{i\psi}we^{-i\psi}\overline{w} = z\overline{z} + w\overline{w} = R^2$$

である。これは、実４次元空間や３次元球面には、各点を動かすような回転があることを意味している。３次元空間や２次元球面の回転には軸が存在することと対照的である。この回転の軌道は円周であるが、３次元球面の大円である。実際、$\dfrac{z}{w}$ が一定であるような、実２次元平面（複素直線）と３次元球面の交わりである。

ホップ・ファイブレーション

３次元球面から２次元球面への写像を次のように定義できることがわかる。

$(z, w) \in \{(z, w) \mid z\overline{z} + w\overline{w} = 1\}$ に対し、$w \neq 0$ ならば、$\dfrac{z}{w}$ をステレオグラフ射影で２次元球面に写した点に写し、$w = 0$ ならば、北極に写す。

これが、ホップ・ファイブレーションと呼ばれる写像である。

つまり、ホップ・ファイブレーションは

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2}(\dfrac{z}{w} + \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}) \\ \dfrac{1}{2i}(\dfrac{z}{w} - \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \dfrac{2u}{1 + u^2 + v^2} \\ \dfrac{2u}{1 + u^2 + v^2} \\ \dfrac{1 - u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2} \end{pmatrix}$$

のように書かれる写像である。$w \neq 0$ に対して、微分可能な写像であるが、$w = 0$ の近傍でも微分可能な写像であることが確かめられる。

このホップ･ファイブレーションの１点 (x, y, z) の逆像は、$\{(z, w) \in \mathbf{C}^2 \mid z\overline{z} + w\overline{w} = R^2\}$ の点で、ある複素数 β に対し $\dfrac{z}{w} = \beta$ を満たす点である。すなわち、$z = \beta w$ で、$(\beta\overline{\beta} + 1)w\overline{w} = R^2$ をみたすから、$w\overline{w} = \dfrac{R^2}{\beta\overline{\beta} + 1}$、すなわち、$w = \dfrac{R}{\sqrt{\beta\overline{\beta} + 1}}e^{i\psi}$. このような (z, w) は、

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{R}{\sqrt{\beta\overline{\beta} + 1}}\beta e^{i\psi} \\ \dfrac{R}{\sqrt{\beta\overline{\beta} + 1}}e^{i\psi} \end{pmatrix} = e^{i\psi} \begin{pmatrix} \dfrac{R}{\sqrt{\beta\overline{\beta} + 1}}\beta \\ \dfrac{R}{\sqrt{\beta\overline{\beta} + 1}} \end{pmatrix}$$

これは、上で考えた回転の軌道である。

このホップ・ファイブレーションの様子は、ビデオの第７章、第８章でみることができる。

ホップ・ファイブレーションに対して南半球の逆像、北半球の逆像はともにソリッドトーラスという図形、ドーナツ型である。つまり、３次元球面は、２つのソリッドトーラスを境界で張り合わせた形になっている。

曲率

３次元球面は、２次元球面のように、正の曲率を持つ空間である。２次元多様体における曲率は、各点の周りに円周を描きその周の長さが平面の円周より短くなる場合正であり、平面の円周よりも長くなる場合負であるというように定めている。３次元多様体の場合には、各点において２次元接平面を定めるとその方向に対して、同じように曲率を考えることができる。これを断面曲率と呼ぶ。半径が R の３次元球面は、あらゆる点のあらゆる２次元接平面に対しての曲率が正で一定 $\dfrac{1}{R^2}$ である。

曲率には、断面曲率以外にそれと同値な情報を持つリーマンの曲率テンソルがある。リーマンの曲率テンソルを、平均してリッチ曲率という量が定義される。これは、リーマン計量と同じ形のテンソル（反変対称テンソル）となる。３次元多様体に対しては各点で座標を取れば、曲線の長さを計算するためのリーマン計量は３行３列の対称行列 (g_{ij}) で表される。リーマン計量を偏微分した式でリッチ曲率 (R_{ij}) が書かれる。このリッチ曲率の値を用いて、リーマン計量を変化させ、空間の形を変形する偏微分方程式の解をリッチ・フローと呼ぶ。リッチ・フローの方程式は

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}$$

と書かれる。リッチ・フローの存在、その解析は、２０世紀の解析学を総動員して行われる。ペレルマン氏は、さらにリッチ・フローの解の特異点を解析して、サーストンの幾何化予想を示し、その特別な場合として、ポアンカレ予想を肯定的に解決した。

サーストンの幾何化予想とは、どんな３次元多様体も有限個の球面とトーラスで分割するとそれぞれのピースが８つの幾何学のひとつをもつ完備な空間から有限個の点を除いたものに同相になるというものである。

この８つの幾何学の定義自体は、それほど難しくない。それだけならば、次のようなページでも参考になる。

http://en.wikipedia.org/wiki/Geometrization_conjecture

＊＊＊＊＊＊

この講義では、時間の関係で丁寧に説明できなかったことが多いので、質問のあるひとは、tsuboi @ ms.u-tokyo.ac.jp にメールしてください。研究室は数理科学研究科棟の 415 号室です。不在のことのほうが多いので、来るときは事前にメールで確認してください。