数理情報一般ー無理数を求める

寺杣友秀

Contents

1. 平方根と 2 次収束

無理数の近似値を求めるためにはそれぞれの性格に応じた工夫が必要である。それぞれの求め方に対して収束の速さが問題となる。まずは一番身近な例として平方根をもとめてみよう。

1.1. **開平方.** 平方根を筆算でもとめるのに広く用いられているのが、開閉法である。ここでは $\sqrt{2}$ を例にもとめてみよう。

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & 1. & & 4 & & 1^{[2]} & & 4 \\
\cline{6-12}
1 & & & & & 2. & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & & & & & 1 & 0 & 0 & & & & \\
\cline{1-1} \cline{6-8}
2 & 4 & & & & 1 & 0 & 0 & & & & \\
 & 4 & & & & & 9 & 6 & & & & \\
\cline{1-2} \cline{7-9}
2 & 8 & 1^{[1]} & & & & & 4 & 0 & 0 & & \\
 & & 1 & & & & & 2 & 8 & 1 & & \\
\cline{1-3} \cline{8-10}
2 & 8 & 2^{[3]} & 4 & & & & 1 & 1 & 9 & 0 & 0 \\
 & & & 4 & & & & 1 & 1 & 2 & 9 & 6 \\
\cline{1-4} \cline{8-12}
2 & 8 & 2 & 8 & & & & & & 6 & 0 & 4
\end{array}
$$

ここで右側の計算を主演算、左側の計算は副演算とよぶことにしよう。

(1) ひとつの計算を進めるステップでは右側の主演算の最下段をみながら左側の副演算の最下段の一桁目を決定するところが要である。たとえば上場合 [1] の位置の「1」は 28*と*の積が左の 400 を超えない最大の整数として定める。この「1」をもって $\sqrt{2}$ の小数点以下 2 桁目の「1」を [2] の位置に書き加える。このときに主演算の 400 は 2 からこれまでに決定されている近似値である 1.4 の 2 乗をひいた数 $2-(1.4)^2=0.04$ の 100^2 倍を表している。

(2) ここで書き入れた 281×1 を 400 の下に書いて、さらに引き算をした 119 をその下に書き加える。桁下に被平方根数の小数点以下５，６桁である 00 をその右に書き入れ、11900 を最下段とする。

(3) 副演算のほうには 281 と 1 の和 282 を [3] に書き入れ、(1) の操作を繰り返す。

この演算は高い精度の近似値を求めるには決して効率のよいものではない。しかしながらひとつのステップで確実に一桁の精度が高くなり、桁を順次求めてゆけるので、次の桁を求めるかどうかをその時点で決定できるのが利点といえよう。

この方法で平方根が求まる理由は次のように説明される。たとえば上の例のように

$$\sqrt{2}=a_0+\frac{1}{10}a_1+\frac{1}{100}a_2++\frac{1}{100}a_3+\dots$$

と書くとして $a_0(=1), a_1(=4)$ と $2-(a_0+\frac{1}{10}a_1)^2(=0.04)$ が求まっているとして、a_2 と $2-(a_0+\frac{1}{10}a_1+\frac{1}{100}a_2)^2$ を求めることを考える。a_2 は

$$
\begin{aligned}
&2-(a_0+\frac{1}{10}a_1+\frac{1}{100}a_2)^2\\
&=\left[2-(a_0+\frac{1}{10}a_1)^2\right]-2(a_0+\frac{1}{10}a_1)\times\frac{1}{100}a_2-\frac{1}{100}a_2^2\\
&=\left[2-(a_0+\frac{1}{10}a_1)^2\right]-\frac{1}{10000}\cdot(200a_0+20a_1+a_2)\times a_2
\end{aligned}
$$

が正となる最大の整数として定めればよい。

副演算の最下段には $200a_0+20a_1$ が書かれているので a_2 は上に書いた条件により決めればよいことがわかる。さらに副演算の足し算により $2000a_0+200a_1+20a_2$ が最下段にかかれ、

$$1000000\times\left[2-(a_0+\frac{1}{10}a_1+\frac{1}{100}a_2)^2\right]$$

が主演算の最下段に書かれることとなる。

1.2. **テーラー展開.** さまざまな超越関数の特殊値を計算するのによく使われるのがテーラー展開である。指数関数、三角関数、対数関数などの高次の微分係数が容易に求められる初等超越関数の特殊値などを求めるのに使え、適用範囲がひろい。分数幂の場合は次のような 2 項展開と同じ公式で計算される。

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3\cdots$$

これは $\mid x\mid<1$ で収束するが x が小さいときにはかなり有効である。n 回の計算で n 桁に比例した精度の計算ができる。

1.3. **ニュートン法.** これは上の計算方法に比べ、もっとも早い計算方法である。$\alpha>0$ としてグラフ $C: y=x^2-\alpha$ と x 軸 $y=0$ の交点の x 座標として求める。まず、計算の初期値 a_0 をとる。これは $\sqrt{\alpha}$ に近い方がよいが、たとえば $a_0=1$ としてとってみる。$n\geq 0$ として a_n が与えられたとき a_{n+1} は次のようにして定まる。$f(x)=x^2-\alpha$ として点 $(a_n, f(a_n))$ における曲線 C の接線

$$
\begin{aligned}
y&=f'(a_n)(x-a_n)+f(a_n)\\
&=2a_n(x-a_n)+a_n^2-\alpha
\end{aligned}
$$

と $y=0$ の交点の x 座標を a_{n+1} とする。実際に解くと

$$a_{n+1}=\frac{a_n^2+\alpha}{2a_n}$$

となる。この方法で求めるとすると収束の早さどうだろうか？$\alpha=2, a_0=1$ としてこの方法を実行してみると、

$$a_2=\frac{3}{2}, a_3=\frac{17}{12}, a_4=\frac{577}{408},$$

などとなる。このとき

$$\frac{1}{2}a_2^2=\frac{9}{8},\frac{1}{2}a_3^2=\frac{289}{288},\frac{1}{2}a_4^2=\frac{332929}{332928},$$

となり、4 回の演算でも 6 桁の既約分数で分母と分子の差が 1 となり、かなり 1 に近い。

問題 1.1. 上のようにして定まる数列を既約分数にしてあらわすとその差は必ず 1 となるのだろうか？

上の数列をもう少し詳しくみてみよう。たとえば $\sqrt{2}-\frac{3}{2},\ldots$ は 0 に近いが分母を払ってみてもどんどん 0 に近くなることが言える。じっさい

$$\begin{aligned}(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})&=1\\(17-12\sqrt{2})(17+12\sqrt{2})&=1\\(577-408\sqrt{2})(577+408\sqrt{2})&=1\end{aligned}$$

などとなるのである。a_n はさらに分母が大きくなるので $\sqrt{2}$ に急速に近づいてくる。ここで

$$\begin{aligned}(3+2\sqrt{2})&=(1+\sqrt{2})^2\\(17+12\sqrt{2})&=(1+\sqrt{2})^4\\(577+408\sqrt{2})&=(1+\sqrt{2})^8\end{aligned}$$

となっていることに注意しよう。

問題 1.2. 上の関係式から一般にどういうことが予想されるか？またそれを証明せよ。

問題 1.3. $\sqrt{2}$ のニュートン法の代わりに平方数ではない自然数 n に対して $\sqrt{n}$ のニュートン法で数列を作るとき、上と同様なことがいえるだろうか？

さて、一般に α の平方根をニュートン法で求めるとき、収束の速さを解析してみよう。

$$a_{n+1}-\sqrt{\alpha}=\frac{a_n+\alpha}{2a_n}-\sqrt{\alpha}=\frac{(a_n-\sqrt{\alpha})^2}{2a_n}$$

となるので a_n がほぼ $\sqrt{\alpha}$ であるので $a_n-\sqrt{\alpha}$ の誤差が ϵ であれば $a_{n+1}-\sqrt{\alpha}$ の誤差は $\frac{\epsilon^2}{2\sqrt{\alpha}}$ 程度となる。たとえば n 項目が k 桁正確な近似値をもっていたら、$n+1$ 項目は $2k$ 桁正確な近似値をもっていることになる。いかに早く正確な近似値が得られるかがわかるだろう。このような速さの収束を 2 次収束という。

1.4. **算術調和平均.** ニュートン法による平方根の近似数列は算術調和平均と呼ばれる数列の極限として解釈することも可能である。ペアの数列 $\{a_n, b_n\}_n$ を次のようにして定義する。まず $a_1 = 1, b_1 = \alpha$ として定義する。a_{n+1}, b_{n+1} は a_n, b_n を用いて

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}}$$

として定義する。a_{n+1} はその前の数列の算術平均、b_{n+1} は調和平均である。このとき二つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は共通の極限をもつことがわかる。この極限を算術調和平均という。$a_1, a_2, \ldots$ はニュートン法で求めた数列と同じものである。実際 $a_{n+1}b_{n+1} = a_n b_n = \cdots = \alpha$ となることがわかるので

$$a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{\alpha}{a_n}}{2} = \frac{a_n^2 + \alpha}{2a_n}$$

となるからである。

ここで算術平均と調和平均の変わりに算術平均と幾何平均（高校では相乗平均という）を用いれば $a_1 = a > 0, b_1 = b > 0$ に対して

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

としてペアの数列 $\{a_n, b_n\}$ が定まる。二つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は再び 2 次収束し、その共通の極限を $M(a, b)$ と書き、算術幾何平均という。ガウスは次の驚くべき定理を発見した。

定理 1.4 (Gauss)**.**

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2}\frac{1}{M(1,k')} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\theta}} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \end{aligned}$$

ここで $k'^2 + k^2 = 1$.

1799 年 5 月 30 日のガウスの日記には、算術幾何平均 $M(1, \sqrt{2})$ と $\frac{\pi}{2\omega} = 1.981402347\cdots$ は小数点以下 11 位まで一致することを発見した事が記されている。ここで ω はレムにスケートの長さで

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

で与えられるものである。そのときのガウスの記録にはこの事実の証明は必ず解析学の全く新しい分野を開くであろう、とも記されている。

2. 算術幾何平均と楕円積分

この章と次の章の内容は「楕円関数論」梅村浩著（東京大学出版会）を参考にさせていただいた。$a > 0, b > 0$ に対してペアの数列 $\{a_n, b_n\}$ を次の式で定義する。

$$a_0 = a \quad b_0 = b, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

このとき数列 a_n, b_n は共通の極限 $M(a,b)$ を持ち、それを算術幾何平均と呼ぶことを前節でやった。この数列 a_n, b_n は 2 次収束する。実際 $n \geq 1$ であれば、$a_n \leq b_n$ であり、

$$\begin{aligned} b_n - a_n =& \frac{a_n + b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n})^2}{2} \\ =& \frac{(b_n - a_n)^2}{2(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n})^2} \end{aligned}$$

となることからわかる。

2.1. **楕円積分と算術幾何平均.** 今回はこの算術幾何平均と楕円積分との関係をのべよう。

定理 2.1 (Gauss)**.** $a < b$ とする。

$$\frac{\pi b}{M(a,b)} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

ここで $0 < k^2 = 1 - \frac{a^2}{b^2} < 1$ である。

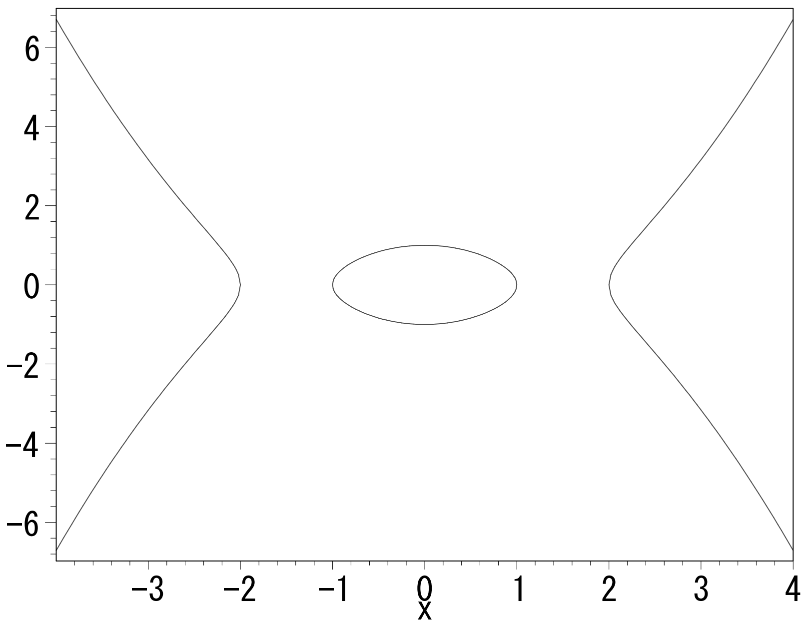
　この定理の右の形の積分は楕円積分と呼ばれるものである。被積分関数は $x = 1$ において無限大となるが、その増大度はおよそ $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 程度であり、

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2$$

となるので右辺の積分は有限で確定する積分となる。楕円積分は楕円曲線と呼ばれる曲線と関係が深い。楕円曲線とは

$$y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2) \tag{2.1}$$

で定義される曲線で $k = \frac{1}{2}$ のときの概型は下のような曲線になる。



この曲線は点対称となるので $(x,y)\mapsto(-x,-y)$ は曲線 C から曲線 C への写像を与える。この写像によって不変な関数 $Y=xy$ および $X=x^2$ を考えるとそれらは

$$(xy)^2 = x^2(1-x^2)(1-k^2x^2)$$

であることに注意すると

$$Y^2 = X(1-X)(1-k^2X) \tag{2.2}$$

なる関係式をみたす。そこで (X,Y) を使って積分の変数変換を考えることにすると

$$\frac{dX}{Y} = \frac{2xdx}{xy} = \frac{2dx}{dy}$$

となるので

$$\int \frac{dX}{\sqrt{X(1-X)(1-k^2X)}} = \int \frac{2dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

なる変換の式を得る。この変換によって再び類似の積分表示を得る。この変換ははじめの楕円積分とどのような関係となっているのであろうか？この問いに答えるには、楕円積分の変数変換について系統的に考えることが有用だろう。

2.2. **楕円積分の変換.** a_1,a_2,a_3,a_4 を相異なる実数として、一般の楕円曲線

$$C: y^2 = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_3)$$

を考える。ここで一次分数変換と呼ばれる変換

$$x = \frac{\alpha u+\beta}{\gamma u+\delta}$$

を行ったとき曲線 C や微分形式 (被積分関数に出てくるものである。) $\frac{dx}{y}$ はどのように変換されるであろうか？前節の最後に現れる二つの積分の関係を考察

するにはこれが不可欠であろう。この変数変換では x と u がほぼ一対一に対応しているので

$$a_i = \frac{\alpha b_i + \beta}{\gamma b_i + \delta}$$

となる $b_1, \dots, b_4$ をとる。このとき

$$\begin{aligned} y^2 =& \Big(\frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta} - \frac{\alpha b_1 + \beta}{\gamma b_1 + \delta}\Big)\Big(\frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta} - \frac{\alpha b_2 + \beta}{\gamma b_2 + \delta}\Big)\Big(\frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta} - \frac{\alpha b_3 + \beta}{\gamma b_3 + \delta}\Big)\Big(\frac{\alpha u + \beta}{\gamma u + \delta} - \frac{\alpha b_4 + \beta}{\gamma b_4 + \delta}\Big) \\ =& \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)^4 (u - b_1)(u - b_2)(u - b_3)(u - b_4)}{(\gamma u + \delta)^4 (\gamma b_1 + \delta)(\gamma b_2 + \delta)(\gamma b_3 + \delta)(\gamma b_4 + \delta)} \end{aligned}$$

なので $\Delta^2 = (\gamma b_1 + \delta)(\gamma b_2 + \delta)(\gamma b_3 + \delta)(\gamma b_4 + \delta)$ となる Δ をとり、

$$v = y \frac{(\gamma u + \delta)^2 \Delta}{(\alpha\delta - \beta\gamma)^2}$$

とおけば

$$v^2 = (u - b_1)(u - b_2)(u - b_3)(u - b_4)$$

となる。また被積分関数の変換は

$$\begin{aligned} \frac{dx}{y} =& \frac{(\gamma u + \delta)^2 \Delta}{(\alpha\delta - \gamma\beta)^2 v} \cdot \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma) du}{(\gamma u + \delta)^2} \\ =& \frac{\Delta}{(\alpha\delta - \gamma\beta)} \frac{du}{v} \end{aligned}$$

となり定数倍を除いて同じ形となる。また $b_1, \dots, b_1$ のうちの一つ、例えば b_4 が無限大となるときは

$$v^2 = (u - b_1)(u - b_2)(u - b_3)$$

と変換される。

2.3. **楕円曲線の同型.** 上のように考えると一見異なる楕円積分も単純な一次分数変換で移りあうことがあることがわかる。より詳しくにのべるなら

注意 2.2. 楕円積分で現れる a_1, a_2, a_3, a_4 が一次分数変換で移りあうものは積分が互いに簡単な変換で移りあう。

　ということがいえる。また上の注意においてそのうちのひとつは無限大となることも許すと話は単純になる。

問題 2.3. 組 (a_1, a_2, a_3, a_4) と (b_1, b_2, b_3, b_4) が与えられたとき、ある $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ が存在して

$$a_i = \frac{\alpha b_i + \beta}{\gamma b_i + \delta}$$

となるための必要十分条件は調和比

$$(a_1, a_2 : a_3, a_4) = \frac{(a_1 - a_3)(a_2 - a_4)}{(a_2 - a_3)(a_1 - a_4)}$$

が等しいときである。これを示せ。

二つの調和比 $(a_1, a_2 : a_3, a_4)$ と $(b_1, b_2 : b_3, b_4)$ が等しいとき、二つの楕円曲線

$$C : y^2 = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)$$

と

$$C' : v^2 = (u - b_1)(u - b_2)(u - b_3)(u - b_4)$$

は同型であるといわれる。このときに得られる調和比は楕円曲線の λ-不変量といわれる。λ-不変量を用いた楕円曲線の表示はルジャンドル型の表示と呼ばれる。このように代数方程式で定義される図形に対してその同型類を決定する不変量の空間はモジュライ空間といわれ、現代数学の中でも盛んに研究されている一分野である。

2.4. **二つの楕円曲線と算術幾何平均.** それでは楕円曲線 (2.2) のパラメータ k を m に置き換えた楕円曲線

$$Y^2 = X(1 - X)(1 - m^2 X)$$

が (2.1)

$$y^2 = (1 - x^2)(1 - k^2 x^2)$$

と同型になる条件を考えよう。上の二式のそれぞれの右辺をゼロにする u および x の順番を適当につけて、考えた二つの調和比

$$(1, m^2; 0, \infty) = m^2$$

と

$$(1, \frac{1}{k}; -1, \frac{-1}{k}) = \frac{4k}{(1+k)^2}$$

が等しいという条件

$$m^2 = \frac{4k}{(1+k)^2}$$

を考える。この条件が満たされる時、3 つの積分

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-m^2\xi^2)}}$$

$$\int \frac{dX}{\sqrt{X(1-X)(1-m^2X)}} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

の間には簡単な関係があることがわかる。楕円曲線の写像でいうと $E_m \to E_k$ なる同型でない写像がえられるのである。積分の範囲を考えて

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{1}{1+k} \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-m^2\xi^2)}}$$

なる関係式があることがわかる。

問題 2.4. これまでの変数変換の組み合わせにより、上の関係式を導け。

この変換はランデン変換とよばれているが、これが算術幾何平均と関連している。

実数 $0 < k < 1$ に対して楕円曲線

$$E(k) : y^2 = (1-x^2)(1-k^2x^2)$$

と定義する。いま算術幾何平均に現れる数列 $\{a_n, b_n\}$ に対して

$$k_n^2 = 1 - \frac{a_n^2}{b_n^2}$$

とおく。このとき

$$k_{n+1}^2 = 1 - \left(\frac{2\sqrt{a_n+b_n}}{a_n+b_n}\right)^2 = \frac{(b_n-a_n)^2}{(b_n+a_n)^2}$$

となり $k_{n+1} = \frac{b_n-a_n}{b_n+a_n}$ となるので

$$\frac{2k_{n+1}}{(1+k_{n+1})^2} = k_n^2$$

となる。従ってランデン変換を用いることにより、

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_{n+1}x^2)}} &= \frac{1}{1+k_{n+1}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_nx^2)}} \\
&= \frac{a_n+b_n}{2b_n} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_nx^2)}} \\
&= \frac{b_{n+1}}{b_n} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_nx^2)}}
\end{aligned}$$

を得る。従って

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{b_n} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_nx^2)}} \\
=&\frac{1}{b_{n+1}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k_{n+1}x^2)}} \\
=&\frac{1}{M(a,b)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{M(a,b)}
\end{aligned}$$

となり定理が示された。

3. 円周率を求める

円周率は太古の時代から多くの人の心を魅了しつづけて来た。古くは旧約聖書にも円周率が 3 であることを記述しているくだりがあるという。解析の考えの源流を作ったといわれるアルキメデスは 96 角形を用いて円周率 π が $3\frac{10}{71} = 3.1410\cdots < \pi < 3\frac{1}{7} = 3.1427\cdots$ を示したので少数点以下 2 桁は正しく求めていたことになる。マチンはこれまでよりよい計算法を用いて、100 桁計算した。計算機の発展によりその記録は飛躍的にのび、1998 年の段階で 515 億桁が金田・高橋により求められた。この記録には計算機の能力だけではなく、収束のよい計算法の発見が寄与している。それは算術幾何平均を用いる Brent

と Salamin が独立に見つけたものである。またこの方法をつかって π を計算するフリーのソフト「Super π」というものがあるが、手持ちの PC で計算させたところ、3355 万桁を計算するのに要した時間は 46 分程度であった。数年前に書かれたと思われるこのソフトの紹介記事では 400 万桁が 12 時間程度で計算できると書いてあったので、このほんの数年での計算時間の短縮度に驚く。(web の記事によると現在では世界記録は (2010/1/10)2 兆 7000 億くらいでパソコンを使って計算したそうである。またアルゴリズムとしては算術幾何平均よりも収束は悪いけれども別の理由で利点のある計算法で計算したらしい。)

3.1. **π の無理数性.** π は無理数であることが知られている。ここでは π^{-2} が無理数であることを示そう。そうすれば必然的に π は無理数であることになる。π^{-2} の整数係数 n 次多項式でその絶対値が次数 n に比べて非常の小さいものを構成することにより有理数であるとして矛盾を引き出す背理法で示す。$\mathbf{Z}$ を整数全体のなす集合とする。

命題 3.1. n は自然数を動くものとする。このとき n によらない定数 c が存在して、任意の $n \geq 1$ に対してある π^{-2} に関する n 次整数係数多項式 A_n

$$A_n = a_0 + a_1\pi^{-2} + a_2\pi^{-4} + \cdots + a_n\pi^{-2n}$$

で

$$0 < A_n < \frac{c}{n!} \tag{3.1}$$

を満たすようなものがあるとする。このとき π^{-2} は有理数ではない。

Proof. 背理法で証明する。もし $\pi^{-2} = \frac{a}{b}$ と書けたとすると、$\pi^{-2n} = \frac{a^n}{b^n}$ なので

$$\frac{1}{b^n}\mathbf{Z} = \{\frac{k}{b^n} \mid k \in \mathbf{Z}\}$$

とおくと、$l = 0, \ldots, n$ に対して $\pi^{-l} \in \frac{1}{b^n}\mathbf{Z}$ となり $A_n \in \frac{1}{b^n}\mathbf{Z}$ となる。$A_n > 0$ なので任意の n について

$$\frac{1}{b^n} \leq A_n \tag{3.2}$$

となる。他方 c は n によらないので十分大きい n については $\frac{c}{n!} < \frac{1}{b^n}$ となり、そのような n について不等式 (3.1) と (3.2) は相容れないので矛盾を生じる。 □

それでは (3.1) を満たす π^{-2} の整数係数多項式 A_n を構成しよう。ここで A_n は π^{-2} に関して n 次の多項式である。

まず $f_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(1-x)^n$、$f_n^{(2m)} = \frac{d^{2m}}{dx^{2m}}f_n(x)$ とおき、

$$G_n(x) = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\pi^{-2m}f_n^{(2m)}(x)$$

とおく。さらに

$$A_n = G_n(0) + G_n(1)$$

とおく。

(1) A_n が π^{-2} の n 次の整数係数の多項式であること。$f_n^{(2m)}(0)$ が整数となることをみよう。まず $2m < n$ あるいは $2m > 2n$ であれば $f_n^{2m}(0) = 0$ であるのは明らかなので、$n \le 2m \le 2n$ であるとしよう。このとき

$$f_n^{(2m)}(0) = \frac{n!}{(2n-m)!(m-n)!} \cdot \frac{1}{n!} m! \in \mathbf{Z}$$

となる。$f(x)$ は 1 と 0 の折り返しに関して対称なので $f_n^{(2m)}(1) \in \mathbf{Z}$ もいえる。

(2) 不等式 $G_n(0) + G_n(1) \le \frac{1}{\pi n!}$. 等式

$$\frac{d}{dx}(G'(x)\sin(\pi x) - \pi G(x)\cos(\pi x)) = (G''(x) + \pi^2 G(x))\sin(\pi x)$$

を用いて

$$\begin{aligned}\int_0^1 \{G''(x) + \pi^2 G(x)\}\sin(\pi x)dx &= \left[G'(x)\sin(\pi x) - \pi G(x)\cos(\pi x))\right]_0^1 \\ &= \pi(G(0) + G(1))\end{aligned}$$

となる。そこで

$$G''(x) + \pi^2 G(x) = f_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(1-x)^n$$

を用いて

$$\int_0^1 \{G''(x) + \pi^2 G(x)\}\sin(\pi x)dx = \int_0^1 \frac{1}{n!}x^n(1-x)^n \sin(\pi x)dx \le \frac{1}{n!}$$

これから問題の不等式をえる。

さてこれで π は有理数ではないことが結論されたが実は任意の有理数係数の代数方程式の解にならないことがしられている。そのような無理数を超越数という。

3.2. マチンの公式. π に絡んだ等式としてマチンの公式と呼ばれる公式がある。これは π の計算に有効に使われる。

まず $\tan(\theta) = \frac{1}{5}$ なる $0 \le \theta \le \pi/2$ をとる。このとき $\tan\theta$ に関する倍角公式を 2 回用いて、

$$\tan(2\theta) = \frac{5}{12}, \quad \tan(4\theta) = \frac{120}{119}$$

なる等式を得る。従って

$$\tan(4\theta - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{239}$$

となる。従って逆三角関数を用いて

$$\arctan(\frac{1}{239}) = 4\theta - \frac{\pi}{4} = 4\arctan(\frac{1}{5}) - \frac{\pi}{4}$$

となり

$$\frac{\pi}{4} = 4\arctan(\frac{1}{5}) + \arctan(\frac{1}{239})$$

なる等式を得る。さらに

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots$$

に代入することにより $\frac{\pi}{4}$ を得る。

3.3. 算術幾何平均と π. 算術幾何平均によっても π が計算できる。この方法による計算の収束は 2 次収束なのでとても早い計算法である。しかしながらその原理をここでのべるのは時間の都合上難しい点がある。これまで楕円積分を算術幾何平均で求めたがこれは第一種の楕円積分と呼ばれる積分に関する計算ほうである。π を楕円積分で求めるには、第 2 種の楕円積分との関連が必要となってくる。第 2 種楕円積分は次の式で定義される積分である。

$$E(k) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

第 2 種楕円積分と第 1 種楕円積分は一般的に全く無関係であるが考えている楕円曲線が特殊な場合それらは関係している。このような楕円曲線は虚数乗法を持つ楕円曲線とよばれ、式 (2.1) で定義されているものがその例となっている。

ここでは結果だけをのべることにする。$a_0 = 1, b_0 = 1/\sqrt{2}$ で始まり

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

で定まる数列を考える。(前節のものと a と b が逆転している。) この数列を用いて、$c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - b_n)$, $c_0 = 2\sqrt{c_1 a_1}$ と定義する。このとき

$$\pi = \frac{2(M(1, 1/\sqrt{2}))^2}{1 - \sum_{k=0}^{\infty} 2^k c_k^2}$$

として π があらわされる。証明は前にのべた梅村「楕円曲線論」にある。この方法で求めると π の 2 次収束する計算アルゴリズムが得られる。

3.4. リーマン面としての楕円曲線. 楕円積分に関する性質をさらにすすめてゆこうとすると、複素関数として捉えることが不可欠となってくる。講義では残った時間でいかにして複素平面から始まりリーマン面を構成してゆくのかを楕円曲線を例に説明しようと思う。