２００３年１０月２０日、２７日

数理・情報一般
数学の現在・過去・未来
空間内の奇妙な図形
坪井　俊

次のような図形の性質についての解説。
１．シェルピンスキーのガスケット
２．シェルピンスキーのカーペット
３．メンガーの曲線
４．ソレノイド
５．円周

１の「和集合の閉包」としての定義
２の「和集合の閉包」としての定義
３の「和集合の閉包」としての定義

閉包とは、その集合の点の収束先を付け加えたもののこと

１の補集合（あるいは共通部分）としての定義
２の補集合（あるいは共通部分）としての定義
３の補集合（あるいは共通部分）としての定義

４の共通部分としての定義

これらの共通の性質：
コンパクト（有界閉集合）
１次元
連結　（２つの閉集合に分かれない）
１－５のうち、２つはあるもう一つの性質を持っている。

定理。１次元連結局所連結コンパクト距離空間で、どの点の近傍も同相であるものは円周か、メンガーの曲線である。

より正確には、次の性質を持つときに等質であるという。
各点 x, y の近傍 U_x, U_y に対し、開集合 W_x, W_y で、$x \in W_x \subset U_x$, $y \in W_y \subset U_y$，$(W_x, x) \longrightarrow (W_y, y)$ が同相となるものがある.
$(W_x, x) \longrightarrow (W_y, y)$ が同相とは、連続写像 $h : W_x \longrightarrow W_y$ で、連続な逆写像 $h^{-1} : W_y \longrightarrow W_x$ を持ち、$h(x) = y$ となるものがあることである。

４は等質であるが、局所連結でない。

まず、次を確かめよう。

和集合の閉包としての定義と補集合（共通部分）としての定義は同じになる.

その説明は、次のものの説明と同じである.

０．カントール集合

カントールの３進集合の定義

$$C=\{\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}\mid a_i=0,2\}$$

注意。$(\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{3^i})+\frac{1}{3^n}=(\sum_{1=1}^{n}\frac{a_i}{3^i})+\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{2}{3^j}$

$C_n=\{\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{3^i}+\frac{b_n}{3^n}\mid a_1,\dots,a_n\in\{0,2\},b_n\in\{0,1\}\}$ とすると

$C_0=\{0,1\}$, $C_1=\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\}$,

$C_2=\{0,\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2},1\},\dots$

$A=\bigcup_{n=0}^{\infty}C_n$ とおく。

また、$U_n=\bigcup_{a_1,\dots,a_n=0,2}(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_i}{3^i}+\frac{1}{3^n},\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_i}{3^i}+\frac{2}{3^n})$ とすると

$U_1=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$, $U_2=(\frac{1}{3^2},\frac{2}{3^2})\cup(\frac{7}{3^2},\frac{8}{3^2})$, $\dots$

$$C=[0,1]\setminus\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i=\bigcap_{j=1}^{\infty}([0,1]\setminus\bigcup_{i=1}^{j}U_i)$$

$\overline{A}\subset C$ である。

一方、C の任意の点 x の近傍 $(x-\frac{1}{2\cdot 3^i},x+\frac{1}{2\cdot 3^i})$ に対し、$C_i=\partial U_i$ の元がある．従って、$\overline{A}\supset C$.

これが、和集合の閉包と、共通部分が一致する理由である。

カントール集合の性質

- $\#A=\#\mathbf{N}<\#C=\#\mathbf{R}$ ($\#$ は元（要素の個数））
- コンパクト　（有界閉集合）
- ０次元

  すなわち、

  ＊任意の点の任意の近傍の中に、その点の開かつ閉であるような近傍がある.（実は、開かつ閉な集合は可算個しかない。）

- 完全集合である．(全ての点 x は、$C-\{x\}$ の閉包に入る。)

$\#\mathbf{N} < \#C$ は次のようにしてわかる。対角線論法

C の元のすべてを自然数に対応して一列に並べられたとする。
$a_{11}a_{12}a_{13}a_{14}a_{15}a_{16}\ldots$
$a_{21}a_{22}a_{23}a_{24}a_{25}a_{26}\ldots$
$a_{31}a_{32}a_{33}a_{34}a_{35}a_{36}\ldots$
$a_{41}a_{42}a_{43}a_{44}a_{45}a_{46}\ldots$
$\ldots$

a_{ij} は 0 または 2 である。
ところが、$b_{11}b_{22}b_{33}b_{44}b_{55}b_{66}\ldots$
を $b_{kk} = 2 - a_{kk}$ とすると、
$b_{11}b_{22}b_{33}b_{44}b_{55}b_{66}\ldots$
に対応する元は C の元であるが、並べた元の k 番目とは、k 番目の数字が異なるから、並べられていない。
これは全て並べたことに矛盾する。従って、C の元のすべてを自然数に対応して 1 列に並べることは出来ない。従って、$\#\mathbf{N} < \#C$ である。

次が成立する。
定理。コンパクト距離空間で、完全集合で＊を満たすものは、カントール集合と同相である．

この定理は次のように示される。
コンパクト＋＊ $\Longrightarrow$ 任意の ε に対し、有限個の開かつ閉の ε 近傍で覆われる．
$\varepsilon_n = \dfrac{1}{2^n}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ に対し、順に次の操作を行なう．
有限個の開かつ閉の ε_n 近傍で覆い、その共通部分を取って、開かつ閉集合による交わらない被覆を作る。そのそれぞれの開かつ閉集合に対し、開かつ閉の ε_{n+1} 近傍によって同じことを繰り返す．
F_n をそうして得られた開かつ閉集合の有限集合とすると、包含関係を表す
$F_0 \longleftarrow F_1 \longleftarrow F_2 \longleftarrow \ldots$
という枝分かれの樹木を得る。(射影系という)
＊＊この樹木はどの枝も必ず枝分かれする．(完全集合から作ったから)
無限の長さの道は、X の１点と１対１に対応する．
無限の長さの道の間の距離を枝分かれした ε の値とすると、距離空間となる．
これと X の間に両連続写像がある．
普通のカントールの３進集合は、
２つずつに枝分かれする樹木である．標準樹木

＊＊を満たす樹木と　標準樹木の間に、無限の長さの道の間では両連続となるような写像を構成できる.
実際、＊＊を満たす樹木を変形すると標準樹木となる。

次元

被覆次元の定義。
被覆次元が高々nであることは「任意の有限開被覆に対して、交わりが高々$n+1$となるような細分がある」ことにより、定義される。

開被覆とは、いくつかの開集合の組で、和集合が全体となるものである.
細分とは、開被覆で、その各開集合が、もとの開被覆の開集合のどれかに含まれるもののことである。

カントール集合は、０次元である.

０次元のコンパクトな完全集合は、カントール集合である.

１－５は１次元であることがわかる。実際に、十分小さな近傍で３つ以上交わらないようにすることができる．全ての近傍の大きさがεよりも小さいとする。
任意の有限開被覆$\{V_1, \ldots, V_k\}$に対して、正実数δで、「各点のδ近傍は被覆の開集合のどれかに含まれる」という性質を持つものがある。

（xの関数$f(x) = \max_i \mathrm{dist}(x, X - V_i)$の最小値を$\delta$とすればよい。）
εとして、δより小さいものを取ると、細分となっている。

２．シェルピンスキーのカーペット
３．メンガーの曲線
は、不思議な性質を持つ空間である。

すなわち、
平面上の任意の１次元有界閉集合は、シェルピンスキーのカーペットの部分集合と同相である。
一般の距離空間内の、任意の１次元有界閉集合は、メンガーの曲線の部分集合と同相である。

$\varepsilon_n = \dfrac{1}{2^n}$に対して、$\varepsilon_n$より細かい閉近傍による有限被覆を考える。それと同じ配置の、閉近傍の配置をメンガーの曲線に実現することが

できる。ε_{n+1} より細かい有限被覆に対しその近傍の配置と同じ配置をメンガーの曲線内に取られた、閉近傍の和集合の中にとることができる。これを繰り返すと、上の事実を示すことができる。