

# 微積分からトポロジーへ

東大数理 古田幹雄

日本数学会数学通信 第9巻 第3号

2004年11月のための原稿。

(図はない。)

## 1 序

以下の文章は、2003年9月27日に行われた市民講演会(日本数学会千葉大学共催)における話を使用したOHPシートを、若干の文章によって補ったものです<sup>1</sup>。高校から大学初年度程度の予備知識から出発して、

- 微積分の概念と性質を振りかえって、その根拠をある方向から洗い出そう
- 微積分の概念を、幾何学的手段として使えるくらい柔軟なものに鍛え上げよう

ということを説明したいと思います。

これから話をする順序は、実際の歴史的順序とは異なります。また、私自身が実際に理解してきた順序とも異なります。しかし、以下に述べるような振りかえり方をしたとき、前よりも納得できた、という個人的経験があり、それをお話したいと思います。

具体的にお話ししたいことは次の3つです。

- 微積分を多変数の場合に拡張する(微分形式、ストークスの定理)
- 微積分を座標なしで展開する(微分形式と多様体の幾何学)
- さらに先へ!(de Rhamの定理)

以上のことを、微分と積分についてのつぎの基本的な関係式から出発して説明したいと思います。

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

---

<sup>1</sup>内容としては[1]を詳述したものです。

## 2 微積分

### 2.1 微積分の定義

微積分の定義を思い出します。

微分とは何でしょうか。とりあえず、高校で学習するように、函数  $f(x)$  のグラフの点  $(x, y) = (c, f(c))$  における接線の傾きが  $f'(c)$  である、いっておきましょう。

(でも後で、これとは違った見方をします。)

微分は(積分に比べると)自由自在に扱える操作であるといえます。というのは、函数同士は加減乗除の演算が可能な対象ですが、それらの演算に対する微分の振るまいがよくわかっているからです。とくに、積の微分の公式、すなわち Leibniz の公式

$$(fg)' = f'g + fg'$$

がポイントです<sup>2</sup>

積分とは何でしょうか。

上のグラフにおいて、斜線部分の面積を、プラスとマイナスの符号付きで総和したものが  $g(x)$  を  $a$  から  $b$  まで定積分したものでした。

$$\int_a^b g(x)dx = \text{斜線の面積.}$$

でも、以下では次のような見方のほうが便利です。 $x$  軸が、実は重さをもった紐であったとし、その重さの分布が場所によってまちまちであったと仮定します。マイナスの重さのものもあつたとします。だから、紐の各部分に、重りや宙に浮かぶ風船がくくりつけられている様を念頭においてくださるといいです。

---

<sup>2</sup>この公式の高次元への拡張、あるいは、それ以前に、そもそも函数には積演算が存在するがゆえに、このような公式も存在しうる、という事実は重要ですが、以下の話では端折ることにします([1] 参照)。

さっきの函数  $g(x)$  は，この重さ分布を表すものと考えます．すると，積分とは，重さの密度分布が与えられたとき，総重量を求める操作であるといえます．つまり，

$$\text{積分} = a \text{ から } b \text{ までの全部の重さ}$$

となります．

### 3 微積分学の基本定理

微積分学の基本定理とは，上の微分と積分とが，次の意味で逆の操作であるという主張でした．つまり， $g = f'$  であるとき次式が成立します．

$$\int_{a_0}^{a_1} g(x)dx = f(a_1) - f(a_0).$$

この式を次のように分析してみます．

- 有向線分  $[a_0, a_1]$  の境界は符号がついた 2 点  $a_0, a_1$  である．
- 函数  $f(x)$  の微分は  $g(x)$  (あるいは形式的には  $g(x)dx$ ) である．
- このとき，左辺は有向線分上で  $g(x)$  を積分したものであり，右辺は符号付 2 点上で  $f(x)$  を総和したものであり，それらが一致する．

この右辺と左辺について詳しくみてみます．

#### 3.1 右辺について

右辺は，函数と符号付き点に対して数を対応させる操作によって得られます．ここで函数とは数直線上の函数です．また，符号付の点とは，数直線上の有限個の点であって，各々に，プラスあるいはマイナスの符号を付与したものです．たとえば，函数  $f$  と，有限個の点  $p_1, q_1, p_2, p_3, q_2$  に対して， $p_1, p_2, p_3$  はプラスの符号が付与され， $q_1, q_2$  にはマイナスの符号が付与されているなら，この操作によって

$$f(p_1) - f(q_1) + f(p_2) + f(p_3) - f(q_2)$$

という数が得られます．この操作は，

- 函数によって点集合を測定している．
- 点集合によって函数を測定している

という二通りの見方をすることができます．翻って，幾何学的な点というものから函数とはなんぞや，という問いを立てるなら

- 函数とは，点集合を測定するものである

と述べることもできます．以上のものの見方では，点がつながっている数直線が，一本のつながった線であるという幾何学は何もみていませんでした．ただの函数は，点同士のつながりを無視して，数直線を全ての実数からなる集合とみなして測定しているだけです．では次に

- 問：点同士のつながり具合をうまくとらえる函数はどんなものだろう？

という問いを立ててみます．そのひとつの答えは

- 答：連続函数．つまり， $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  をみたす函数．

となります．というのは，次のことが成り立つからです．点列  $p_k$  が  $p_\infty$  に収束していたと仮定します．この時，連続函数  $f$  に対して値  $f(p_k)$  は値  $f(p_\infty)$  に収束します．特に，数直線上の座標  $f(x) = x$  をとったとします．このとき，点  $p_k$  での値  $f(p_k)$  をみれば（その値の極限によって）点の極限  $p_\infty$  の位置  $f(p_\infty)$  を決定することができます．

### 3.2 左辺について

左辺は，形式的に  $g(x)dx$  と書かれるものと（有限個の）有向線分に対して，積分によって数に対応させる操作から得られます．たとえば，形式的に  $g(x)dx$  と書かれるものと，有限個の有向線分の和集合

とから，次の数

$$\int_p^q g(x)dx - \int_r^s g(x)dx$$

が得られます．この操作は，

- ” $g(x)dx$ “によって有向線分を測定している．
- 有向線分によって” $g(x)dx$ “を測定している

という二通りの見方をすることができます．これまで” $g(x)dx$ ”というものについては，形式的に函数  $g(x)$  と， $x$  の変位を示唆する記号  $dx$  との組み合わせとして表示されるもの，という以上のことは何も考えてきませんでした．実質的には，函数  $g(x)$  を考えることと，” $g(x)dx$ “というものを考えることとの差がないようにも思われます．しかし，上のような測定という見方をするなら，

- ” $g(x)dx$ “とは，有向線分を測定するものである．

と述べることができます。函数  $g(x)$  を，有向線分の測定装置として使う場合に  $g(x)dx$  と書くことにする，というわけです。

さて，点の測定装置である函数の場合には，点たちの直線上での連なり方を見ながら測定するための装置が連続函数であると考えました。今の場合にはどうでしょうか。まず，有向線分が連続的に変化するとき，測定値（つまり積分値）も連続的に変化するものであってほしい，というのは当然の要求でしょう。有向線分の長さが短くなって，ついに0になるときには，測定値は0に収束してほしい。また，ふたつの有向線分が近づいてきて端でくっついて，ひとつの有向線分となるときにも，測定値は連続的に変わることを要請しておきましょう。つまり，数直線の幾何学をうまく捉えるような測定装置であるために，自然に要請される性質の大切なものは次の等式です。

$$\int_p^q g(x)dx = \int_p^r g(x)dx + \int_r^q g(x)dx$$

この等式が成り立つと，次のことがわかります：ひとつの有向線分に対する測定値をもとめるには，その有向線分を細かくわけておいて，その各々の，極めて短い有向線分に対する測定値を総和すればいいことになります。つまり，測定装置がどんなものであるかを見るには，とても短い有向線分に対する測定値が（すべて）わかれば十分です。

### 3.3 $g(x)dx$ とは何か

まとめます。 $\alpha = g(x)dx$  と書くとき， $\alpha$  とは，有向線分  $I$  に対して数  $\int_I \alpha$  を対応させる写像であって，

- ならば  $\int_I \alpha + \int_{I'} \alpha = \int_{I \cup I'} \alpha$
- ならば  $I$  の長さ  $|I|$  が小さいとき  $\int_I \alpha \sim g(a)|I|$

をみたくもののことです。ただし， $g(x)$  は連続函数であると要請します。というのは，長さが短い有向線分を，長さを変えずに位置をいろいろ動かすとき，測定値が連続的に変化するものを考えたいからです。

## 4 高次元化

これまでは，数直線上の点，線，函数，などを考えてきました。これからは，平面上の点，線，面，函数，などを考えることにします。

### 4.1 積分の拡張

- 平面上の符号付きの点を（連なりかたを反映しながら）測定するものは，やはり連続函数でしょう。測定の仕方は数直線の場合と同様です。

- 平面上の曲線を（連なりかたを反映しながら）測定する測定装置はどんなものでしょうか．すぐあとでそれを説明しますが，そのような測定装置を1次微分形式と呼びます．
- 平面上のある限られた面を（連なりかたを反映しながら）測定する測定装置はどんなものでしょうか．これもすぐに説明しますが，そのような測定装置を2次微分形式と呼びます．

## 4.2 1次微分形式

1次微分形式とは（平面上の）線を測定するものである，と取り合えず大上段に目指すところを宣言しました．それっぽいものの例をふたつあげます．

- 候補1：線の長さ．つまり，線に対してその長さを測定する操作．
- 候補2：実数  $A, B$  に対して，次のように定義される測定

しかし，私たちが探しているのは，線のつながりかたや線の連続的な変化をうまく反映しているような測定装置です．たとえば，

という線分の極限に対して， $C_k$  の測定値は， $k \rightarrow \infty$  のとき， $C_\infty$  の測定値に収束していることを要請しましょう．

すると，候補1にあげた線の長さはこの条件をみたしていません． $C_k$  の長さは， $k$  が有限である限り，一定です．しかし， $C_\infty$  の長さはあきらかにその一定値より小さくなっています．

一方，候補2にあげた測定はこの条件をみたしています．というのは，候補2の測定値は，与えられた線の，始点と終点だけにしか依存していません．間で線がどんなに曲がりくねろうと，測定値は変わりません． $C_k$  は  $C_\infty$  もふくめて，始点と終点は同じ点です．ですから，測定値は  $k = \infty$  でも同じ値となります．

上の要請をいいかえてみます．

- いいかえ1：うんと小さな三角形  $\triangle ABC$  に対して，  
 $C$  の測定値 +  $C'$  の測定値 =  $C''$  の測定値．

- いいかえ 2 : うんと小さな平行四辺形 に対して

$C$  の測定値 +  $C'$  の測定値 =  $C''$  の測定値 .

この要請をみたく測定方法のことをあらためて 1 次微分形式となづけます . そして , 1 次微分形式  $\alpha$  による  $C$  の測定値を

$$\int_C \alpha$$

と書くことにします .

#### 4.2.1 候補 2 の拡張

候補 2 の定数  $A, B$  が , 場所とともに変化したとすると , 以下のような構成に拡張されます .  $A(x, y), B(x, y)$  をふたつの連続な 2 変数関数とします . この  $A(x, y), B(x, y)$  を用いることによつて , 平面上の  $(a_0, b_0)$  から発して  $(a_1, b_1)$  に至る曲線  $C$  に対して , それを測定する方法を次のように定義できます .

まず  $C$  を下図のように細かく分割します .

これに対して数

$$\sum_{k=1}^N \{A(x_k, y_k)(x_k - x_{k-1}) + B(x_k, y_k)(y_k - y_{k-1})\}$$

を対応させます . 曲線  $C$  曲線の分割の仕方をどんどん細かくしてゆくと , 上の数はある極限値に収束します . この極限値をもって ,  $C$  の測定値の定義とします . この測定値を

$$\int_C \{A(x, y)dx + B(x, y)dy\}$$

と書くことにします .

この対応

$$C \mapsto \int_C \{A(x, y)dx + B(x, y)dy\}$$

は , もし  $A(x, y), B(x, y)$  が  $A, B$  に値をとる定数関数であれば , 候補 2 と同一の対応です . また , 一般に ,  $C$  が極めて短い曲線であるときには候補 2 とほとんど同じ構成といえます . なぜ

なら，曲線が短ければ，その曲線の上では函数  $A(x, y), B(x, y)$  は定数函数によって近似できるからです．

実は，函数  $A(x, y), B(x, y)$  を用いて定義されたこの対応も，1 次微分形式を与えています．そういう根拠は，結論だけ述べると，上に述べた短い曲線についての性質です．つまり，今はこれ以上述べませんが，この「根拠」に基づいて「1 次微分形式であること」を証明できます．ここに現れた 1 次微分形式を

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy$$

という記号で表すことにします．

#### 4.2.2 平面上の 1 次微分形式

次のことが成立します．

- 平面上の 1 次微分形式はある連続函数  $A(x, y), B(x, y)$  を用いて

$$A(x, y)dx + B(x, y)dy$$

の形に必ず書くことができる．

つまり，さっき構成したもので平面上の 1 次微分形式は尽くされています．

ここでポイントは，もともとの 1 次微分形式の定義では平面の座標は現れていなかったことです（もっともこの話では厳密な定義は述べておらず，直観的な要請しか述べませんでした）

#### 4.3 0 次微分形式から 1 次微分形式をつくる

$f(x, y)$  を平面上の函数とします．つまり， $f = f(x, y)$  は 0 次微分形式です． $f$  から 1 次微分形式をつくるひとつの方法を述べます．

この  $f = f(x, y)$  を用いて，曲線  $C$  を測定してみる方法がほしいわけです．0 次微分形式によって直接測定できるのは（符号付の）有限個の点でした．ですから，曲線  $C$  に対して（符号付の）有限個の点に対応させるメカニズムがあれば，このメカニズムを経由することによって  $C$  の測定ができます．

アイディアは，この，曲線から点をつくるメカニズムとして，端点を考えるということを採用するというものです．

つまり「境界をとる」という操作

↪

と，それに引き続いて，0 次微分形式  $f$  による本来の測定

$$\stackrel{(f)}{\mapsto} f(a_1, b_1) - f(a_0, b_0)$$



を合成したものを考えます。この合成は要請のいいかえ 1 を満たしています。

したがって、この合成はある 1 次微分形式を与えています。この 1 次微分形式を

$$df$$

と書くことにします。

#### 4.3.1 例 $f(x, y) = Ax + By$

$f(x, y)$  が一次関数  $Ax + By$  である場合を考えてみます。

に対して

$$(Aa_1 + Bb_1) - (Aa_0 + Bb_0) = A(a_1 - a_0) + B(b_1 - b_0)$$

を対応させる 1 次微分形式は前に準備した記号によると

$$Adx + Bdy$$

に他なりません。すなわち

$$d(Ax + By) = Adx + Bdy$$

と書くことができます<sup>3</sup>。

#### 4.3.2 外微分

0 次微分形式 ( 函数 )  $f$  に対して、1 次微分形式  $df$  が定義されました。鍵は「曲線にその端点を対応させる」ことでした。出来あがった 1 次微分形式  $df$  は、一般論から  $A(x, y)dx + B(x, y)dy$  の形に表示されるはずですが、実は  $A(x, y) = \partial f / \partial x$ ,  $B(x, y) = \partial f / \partial y$  であることが計算によって示されます。つまり、まとめて書くと、

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

となります。

---

<sup>3</sup>注：記号  $dx, dy$  の意味も上の議論から説明できます。

### 4.3.3 微積分学の基本定理の拡張

曲線  $C$  の始点が  $(a_0, b_0)$  であり，終点が  $(a_1, b_1)$  であったとします．このとき，外微分  $df$  の定義を振りかえると，

$$\int_C df = -f(a_0, b_0) + f(a_1, b_1)$$

が言えます．この式は， $df$  の公式を代入するなら，微積分学の基本定理の形式的拡張の形をしています． $df$  の公式は大切なのでもう一度述べると

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

です．また，この式は，次のふたつの対応をぐっと睨むと，左辺は「左上と右下の組み」，右辺は「右上と左下の組み」としてシステマティックに見えてくるとおもいます．

$$\text{曲線 } C \xrightarrow{\text{端点}} \text{2点 } (a_0, b_0), (a_1, b_1)$$

$$[0 \text{ 次微分形式 } f] \xrightarrow{d} [1 \text{ 次微分形式 } df]$$

このシステマティックな見方をさらに拡張します．

## 4.4 2次微分形式

2次微分形式とは（とりあえずは平面上の）面を測定するもののことです．平面上の領域  $S$  の上に，ある重さをもったものが分布していたと仮定します．

標語的にいうなら，

「面  $S$  上の積分 = 面  $S$  に分布する全部の重さ」

となります． $S$  上に面密度  $C(x, y)$  で物質が分布しているときの全質量を

$$\int_S C(x, y) dx dy$$

とかくことにします．

### 4.4.1 平面上の2次微分形式

この対応

$$S \mapsto \int_S C(x, y) dx dy$$

が与える 2 次微分形式を

$$C(x, y)dx \wedge dy$$

と書くことにします。

例 (ただの) 面積

$C(x, y) = 1$  であるとき,

$$1dx \wedge dy = dx \wedge dy$$

と略して書きます。この 2 次微分形式は  $S$  に対して  $S$  の面積を対応させるものです。

#### 4.5 1 次微分形式から 2 次微分形式をつくる

$\alpha$  を平面上の 1 次微分形式とします。つまり  $\alpha$  は線を測定するものです。 $\alpha$  から 2 次微分形式をつくるひとつの方法を述べます。

この  $\alpha$  を用いて、面  $S$  を測定してみる方法がほしいわけです。1 次微分形式によって直接測定できるのは (向きをついた) 曲線でした。ですから、面  $S$  に対して (向きをついた) 曲線に対応させるメカニズムがあれば、このメカニズムを経由することによって  $S$  の測定ができます。

アイディアは、この、面から曲面をつくるメカニズムとして、境界を考えるというものを採用するというものです。

つまり、「境界をとる」という操作

↪

と、それに引き続いて、1 次微分形式  $\alpha$  による本来の測定

$$\partial S \stackrel{(\alpha)}{\mapsto} \int_{\partial S} \alpha$$

を合成したものを考えます。この合成は 2 次微分形式を与えます。

この 2 次微分形式を  $d\alpha$  と書くことにします。

##### 4.5.1 外微分 II

$$\alpha = A(x, y)dx + B(x, y)dy$$

$$d\alpha = C(x, y)dx \wedge dy$$

と書くとき、

$$C(x, y) = \left( -\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right)$$

であることを示すことができます。

この主張は次のガウス・グリーンの定理と同値です。

#### 4.5.2 ガウス・グリーン の定理

面  $S$  の境界が  $\partial S$  であったとします．このとき，外微分  $d\alpha$  の定義を振りかえると，

$$\int_S d\alpha = \int_{\partial S} \alpha$$

が言えます．ただし計算によると， $\alpha = A(x, y)dx + B(x, y)dy$  に対して

$$d\alpha = \left( -\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

であることが知られています．

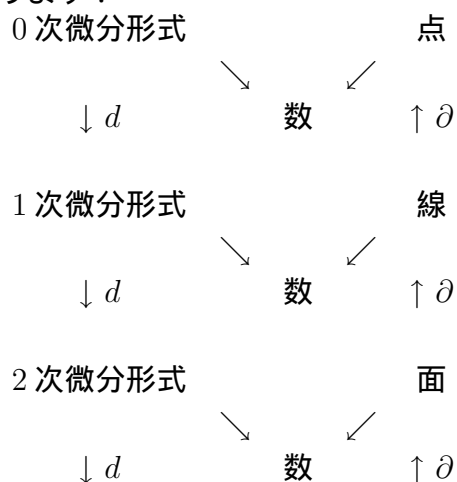
また，この式は，次のふたつの対応をぐっと睨むと，左辺は「左上と右下の組み」，右辺は「右上と左下の組み」としてシステマティックに見えてくるとおもいます．

$$\text{面 } S \xrightarrow{\text{境界}} \partial S$$

$$[1 \text{ 次微分形式 } \alpha] \xrightarrow{d} [2 \text{ 次微分形式 } d\alpha]$$

#### 4.6 ここまでのまとめ

微分形式に対して「外微分」 $d$  という概念を導入しました．また，図形に対して「境界をとる」(あるいは端点を考える) という操作  $\partial$  を導入しました．模式的にまとめると，次のようになります．



#### 4.7 ストークスの定理

また，外微分の(これまでの筋道における)定義をまとめると次のようになります．

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

この式をストークスの定理といいます。この式が本当に力を持つのは、 $df$  を  $f$  からどう計算したらいいかが具体的にわかることです<sup>4</sup>。

境界をとる操作  $\partial$  と外微分  $d$  とは、たとえてみれば、互いの転置行列のようなものであることを説明します。

思い出すと、行列  $F$  の転置行列  ${}^tF$  は

$$(v, Fu) = ({}^tFv, u)$$

という性質をもっていました。ここで  $v, u, F, {}^tF, ()$  のかわりに  $M, \omega, d, \partial, f$  を代入すれば、ストークスの定理の形になります。

#### 4.7.1 $dd$

行列  $F, G$  が  $FG = O$  をみたせば転置行列は  ${}^tG{}^tF = O$  をみたすことを思い出します。

いわば、 $\partial$  と  $d$  とは互いの転置行列のような関係にある、と説明しました。

とくに、境界の境界は空集合に注意します。

比喩的にいうなら、いわば“ $\partial\partial = 0$ ”とでもいうような状況です。

これは、転置行列にあたる  $d$  の側でいえば、

$$dd = 0$$

を意味しています。

例

$$ddf = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) = \left(-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx \wedge dy = 0.$$

## 5 多様体上の微分形式

微分形式の定義のためには固定された座標は不必要です。

1点の近くを各台してゆくとユークリッド空間とそっくりになるような図形であることだけが必要です（三角形を書くことが必要でした。）

このような要請をみたす図形が多様体です。

<sup>4</sup>この計算方法はライブニッツ規則の外微分への拡張によって与えられますが、ここでは説明を省略します。

## 5.0.2 2次元多様体の例

例1 [3次元ユークリッド空間の中の open surface]

例2  $\{(x, y) \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$  穴あき平面

例3  $\{(x, y, z, w) \mid x^2 + y^2 = z^2 + w^2 = 1\}$

## 5.1 ひとつの幾何学的な問い

これから幾何学のひとつの問題へのひとつのアプローチについて考察します。

$M$  上の曲線  $C_1, C_2, C_3$  は,  $M$  上のある曲面の境界としてあらわすことができるでしょうか? つまり, 各  $i = 1, 2, 3$  に対して「 $C_i = \partial S$  となる  $S$  は存在するだろうか」という問いを考えます。

### 5.1.1 答えがすぐわかる場合

- $C_2$  この場合は Yes です。

$$C_2 = \partial S$$

- $C_3$  この場合は No です。

$$\partial C_2 \neq \emptyset$$

というのは、もし  $C_3 = \partial S$  であれば、 $\partial C_3 = \partial \partial S = \emptyset$  とならなくてはならないからです。

### 5.1.2 答えがすぐにわからない場合

$C_1$  いかにも No に見えます。

しかし、それをどうやって証明したらいいのでしょうか？

注：曲面上の曲線の場合には上の例のように目でみて答えの見当がつく場合があります。しかし、もっと高次元の場合に類似の問題を考えたときには、そもそも図に書くことができないので直感が働きにくくなります。

## 5.2 微分形式に対する問い

上の問題と形式的にはよく似た問題を微分形式に対して立てることができます。

$\alpha$  を 1 次微分形式とすると、次の問いを考えてみます。

「 $\alpha$  は、ある 0 次微分形式  $f$  によって

$$\alpha = df$$

と表すことができるだろうか？」

### 5.2.1 穴あき平面

原点を取った平面を考えます。

この穴あき平面上で、次の 3 通りの 1 次微分形式を考えます。

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\frac{x}{x^2+y^2}dy + \frac{y}{x^2+y^2}dx \\ \alpha_2 &= \frac{x}{x^2+y^2}dy + \frac{y}{x^2+y^2}dx \\ \alpha_3 &= -xdy + ydx\end{aligned}$$

### 5.2.2 答えがすぐわかる場合

- $\alpha_2$  については Yes です．実際

$$\alpha_2 = d \log \sqrt{x^2 + y^2}$$

を確かめることができます．

- $\alpha_3$  については No です．これを示すために，まず，

$$d\alpha_3 = -2dx \wedge dy \neq 0$$

に注意します．もし  $\alpha_3 = df$  となる  $f$  が存在したとしたら，

$$d\alpha_3 = ddf = 0$$

となって矛盾してしまいます．

### 5.2.3 答えがすぐにわからない場合

$\alpha_1$  は， $d\alpha_1 = 0$  を満たすことが計算ですぐに確かめられます．ですから，上の  $\alpha_3$  に対して行った議論を適用することはできません．しかし，いろいろ工夫してみても， $\alpha_1 = df$  となる  $f$  はありそうにないことが実際に手をつけてみると見当がつきます．

しかし，それが正しかったとしても，どうやって本当に証明したらよいのでしょうか．

## 5.3 ふたつの問題を同時に考察する

答えがすぐにはわからない 2 種類の問題を紹介しました．最初の問題はきわめて幾何学的な問題でした．もうひとつの問題は，微分形式という概念を使って定式化される（その意味で）人工的な問題でした．わからない問題が増えただけのようにも見えます．

しかし，この人工的な問題を合わせて考えると，最初の幾何学的な問題をとく方法が与えられることをこれから説明します．鍵はストークスの定理です．

両者の問題を，ひとつの多様体の上で同時に考察してみます．

- $C$  を，曲線 であって  $\partial C = \emptyset$  を満たすものとします．
- $\alpha$  を，1 次微分形式 であって  $d\alpha = 0$  を満たすものとします．

このとき，次の二つの問いを同時に考えます．

- 問 :  $C = \partial S$  となる  $S$  はあるか？
- 問 :  $\alpha = df$  となる  $f$  はあるか？



### 5.3.1 主張

我々が注目したいのは，二つの問いを同時に考察すると，次のような「不可能性の証明」が可能である，という点です．

主張：もし

$$\int_C \alpha \neq 0$$

であれば，どちらの問の答えも No である．

証明：

もし  $\alpha = df$  ならストークスの定理から

$$\int_C \alpha_1 = \int_C df = \int_{\partial C} f = \int_{\emptyset} f = 0$$

となって矛盾します．また，もし  $C = \partial S$  ならストークスの定理から

$$\int_C \alpha_1 = \int_{\partial S} \alpha_1 = \int_S d\alpha_1 = \int_S 0 = 0$$

となってやはり矛盾します．

証明終．

### 5.3.2 例

次の場合

$$\alpha_1 = -\frac{x}{x^2 + y^2} dy + \frac{y}{x^2 + y^2} dx$$

に対して定義にもどって計算すると，

$$\int_C \alpha_1 = -2\pi \neq 0$$

がわかります（円周  $C_1$  を角度  $\theta$  によってパラメータ表示するのがわかりやすい方法です．）これを認めることにしますと，

- どんな  $f$  に対しても  $\alpha_1 \neq df$
- どんな  $S$  に対しても  $C \neq \partial S$

が同時に帰結されます．

微分形式という概念は，幾何学的な問題を解くために有用であるといえます．

## 6 この議論への疑問

ここで次のように思う方がおられるかもしれません。

- $C$  に対してたまたまある  $\alpha$  をみつけて  $\int_C \alpha \neq 0$  となれば，すべての  $S$  に対して  $C \neq \partial S$  が成立することがわかった。
- しかし，この方法はいつも使えるのだろうか？つまり，仮にどんな  $S$  に対しても  $C \neq \partial S$  であったとしたする．このとき， $d\alpha = 0$  かつ  $\int_C \alpha \neq 0$  となる  $\alpha$  は必ず存在するのだろうか？

要するに，

微分形式という概念は，こうした幾何学を扱うための手段として十分強力といえるのだろうか？

という問題提起です。

転置行列に対して，ほぼ似たタイプの問題提起をすることができます．このとき，答えは肯定的です。

転置行列に対して次の命題は線型代数の演習問題です。

行列  $F, G$  の合成  $FG$  が  $O$  であったとします（簡単のため，サイズと同じ正方行列を念頭においてください．そうでなくてもいいのですが．）このとき転置行列  ${}^tF, {}^tG$  に対して，次の性質が成り立ちます：

ベクトル  $u$  が  $Fu = 0$  を満たしているとする．また，どんなベクトル  $w$  に対しても  $u \neq Gw$  であったと仮定する．このとき  ${}^tGv = 0$  となるあるベクトル  $v$  が存在して，内積  $(u, v)$  は  $0$  でない。

この命題は，転置行列の場合に問題提起は肯定的が答えが返ってくることを意味します。

ですから，これを踏まえるならば，我々の問題提起は，

$d$  と  $\partial$  とは互いの転置行列みたいなものだ，という比喩はどこまで成立するのだろうか？

という意味に解釈することができます。

### 6.1 疑問への最初の答え

実は，我々の問題提起に，完全に肯定的な答えを返すことはできません．つまり

微分形式はそこまで強力ではない!

といえます．（あるいは，つまり， $d$  と  $\partial$  とは厳密には互いの 転置と解釈できない，といえます．）

### 6.2 ひとつの例

円板において，境界の円周の向かい合った点を同一視した図形を考えます．この図形は実射影平面と呼ばれています．そこに次のような曲線  $C$  を描きます。

上の例では  $C$  は  $\partial C = \emptyset$  をみたす曲線です。そして、どんな  $S$  に対しても  $C \neq \partial S$  であることが知られています。しかし、どんな  $\alpha$  をとってきて、もし  $d\alpha = 0$  であれば、自動的に

$$\int_C \alpha = 0$$

となってしまうことを示せます。

(円板をふたつとってきて、はりあわせると球面になります。これをつかうとわかるのですが、省略します。)

### 6.3 疑問への2番目の答え

しかし、この問題提起に対して、実は、ほとんど肯定的な答えを返すことができます。つまり、しかし、相当に強力である！

といえます(つまり、 $d$  と  $\partial$  とは、ほとんど互いの転置とみなしてよい、ということです。) 事実として次のことが成立すると知られています。

閉曲線  $C$  が、 $d\alpha = 0$  となるどんな  $\alpha$  に対しても

$$\int_C \alpha = 0$$

となると仮定する。このとき、 $C$  を何重かに重複させると、ある  $S$  の境界になる。すなわち、ある自然数  $n$  とある曲面  $S$  が存在して

$$nC = \partial S$$

をみたす。

ごく大雑把な言い方をすると、上の命題は、考えている多様体  $M$  の複雑さについての帰納法によって示すことができます ( $M$  がユークリッド空間の場合に示し、次に  $M$  ユークリッド空間2個の張りあわせで作れる場合に示し、次に ...)

### 6.4 前の例の場合

$C$  を2重にしたものはある  $S$  の境界になっています。下の図では、見やすくするために、 $C$  を2重にしたものをすこしずらして書いてあります ( $S$  の上に書いてあるプラス、マイナスは、表裏を指示しています。)

$$2C = \partial S$$

## 6.5 トポロジーへ

上に述べた微分形式のもつ「強力さ」を整理し、明確な定式化を与えたものとして de Rham の定理と呼ばれる定理があります（例えば [2] 参照）。

この定理こそが、微分形式を用いて多様体のトポロジーを研究するための出発点といえます。

さらに、微分形式・外微分・外積<sup>5</sup>のなす代数的体系が、de Rham の定理を超えた、多様体のトポロジーのより深い性質を捕捉していることが知られています（例えば [3] 参照）。

一方、微分形式のような微積分を使う手法を、外微分のような単純な作用素ではなく、もっと複雑な、しかし幾何学的な意味のある作用素を用いて考察する、という方向も可能かもしれません<sup>6</sup>。

$d$  と  $\partial$  との関係には 厳密には転置行列による比喩で捉えきれない部分があると述べました。この認識は 比喩がどこまで成立するかという問いを立てることによって初めて得られました<sup>7</sup>。その意味で、微分形式による手法は、いわばネガティブな形で、多様体の存在の微妙さ、複雑さを指し示しています。

今私たちがたどり着いた地点の先には、まだ見ぬ世界が放射状に広がっています。

しかし、私たちは余りにも遠くまで来てしまったようです。

### 参考文献

- [1] 古田幹雄 微分形式と Stokes の定理，数理科学 1995 年 12 月号，サイエンス社
- [2] 服部晶夫 多様体のトポロジー 岩波書店 2003 年
- [3] 森田茂之 特性類と幾何学 岩波講座現代数学の展開

---

<sup>5</sup>この話では端折った 微分形式たちの間の積のことです。

<sup>6</sup>微分幾何とよばれる分野がこれにあたります。

<sup>7</sup>この微妙な部分に潜む情報を取り出すには微積分とは違った手法が必要になります。