

# 1 有限生成定理

任意の代数多様体に対して、その標準環が有限生成であることを証明する：

定理 1.1. 滑らかで射影的な代数多様体  $X$  において、標準環

$$R(X, K_X) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} H^0(X, mK_X)$$

は有限生成な次数付き環になる。

*Proof.*  $R(X, K_X) \neq \mathbb{C}$  であると仮定してよい。まず、標準環は双有理不変量であることに注意する。すなわち、もう一つの滑らかで射影的な代数多様体からの双有理射  $\mu : X' \rightarrow X$  に対して、 $R(X, K_X) \cong R(X', K_{X'})$  が成り立つ。体

$$L = \{s_1/s_2 \mid \exists m, s_1, s_2 \in H^0(X, mK_X)\} \cup \{0\}$$

は関数体  $\mathbb{C}(X)$  の部分体であり、拡大  $\mathbb{C}(X)/L$  は正則拡大である。したがって、 $\mathbb{C}(X)$  と  $L$  の双有理モデルを適当にとれば、代数的ファイバー空間  $f : X \rightarrow Y$  があるとしてよい。作り方から  $\dim Y = \kappa(X)$  であり、 $f$  の一般ファイバー  $X_y$  に対して  $\kappa(X_y) = 0$  が成り立つ。

十分大きくかつ割り切れる整数  $m$  をとって、元  $D \in |mK_X|$  を一つ固定する。 $Z = \text{Supp}(D)$  において Abramovich-Karu の定理を適用すると、体拡大  $\mathbb{C}(X)/L$  双有理モデルとしてよく準備された代数的ファイバー空間  $f : (X, B) \rightarrow (Y, C)$  をとることができる。もとの  $D$  に対応する元  $D \in |mK_X|$  を改めて同じ記号で表せば、 $B = \sum B_i$ ,  $D = \sum d_i B_i$  と表せる。 $D$  を  $f$  に関して水平な成分と垂直な成分に分けて、 $D = D^h + D^v$  と表す。 $\kappa(X_y) = 0$  であるので、 $D^h$  は何倍しても動かない。

$M$  を  $f^*M \leq D^v$  が成り立つような  $\mathbb{Q}$  因子のうちで最大のものとして定義する。 $m$  を倍数で置き換えれば、 $M$  は整数係数の因子であるとしてよい。 $f$  のファイバーたちは等次元であるので、等式

$$R(X, K_X)^{(m)} \cong R(Y, M) = \bigoplus_{m'=0}^{\infty} H^0(Y, m'M)$$

が成り立つ。従って、 $R(Y, M)$  が有限生成であることを示せばよい。

$D$  を使って分岐被覆  $\pi_X : X_1 \rightarrow X$  を構成する。ここで、 $X_1$  は正規な射影多様体であり、 $D = mK_X + \text{div}(h)$  となるような有理関数  $h$  に対し

て、式  $C(X_1) = C(X)(h^{1/m})$  によって定義される。 $\pi_X$  は自然な有限射であり、その次数は  $m$  の約数である。 $B_1 = \pi_X^{-1}(B)$  とおけば、 $(X_1, B_1)$  は再びほとんど滑らかなトロイダル多様体になる。

合成射  $f \circ \pi_X : X_1 \rightarrow Y$  をシュタイン分解して、 $\pi_Y \circ f_1 : X_1 \rightarrow Y_1 \rightarrow Y$  とする。 $\pi_Y$  の分岐集合は  $C$  に含まれるので、更に有限射  $\pi_{Y_1} : Y' \rightarrow Y_1$  で持ち上げることにより、誘導された射  $f' : (X', B') \rightarrow (Y', C')$  が弱半安定モデルになるようにできる。ここで、誘導された射  $g_X : X' \rightarrow X$ ,  $g_Y = \pi_{Y_1} \circ \pi_Y : Y' \rightarrow Y$  に対して、 $B' = g_X^{-1}(B)$ ,  $C' = g_Y^{-1}(C)$  である。

$B = \sum B_i, C = \sum C_j$  を既約分解とし、 $f^*C_j = \sum b_{ij}B_i$  とおく。また、 $B' = \sum B'_k, C' = \sum C'_l$  を既約分解とし、 $g_X^*B_i = e_i \sum_{k \in I_i} B'_k$ ,  $g_Y^*C_j = f_j \sum_{l \in J_j} C'_l$  とおく。 $f'$  のファイバーは被約であるので、 $f(B_i) = C_j$  のとき  $b_{ij}e_i = f_j$  である。

$K_{X'} = g_X^*K_X + \sum_{i,k \in I_i} (e_i - 1)B'_k$ ,  $K_{Y'} = g_Y^*K_Y + \sum_{j,l \in J_j} (f_j - 1)C'_l$  である。 $D \in |mK_X|$  に対応する因子  $D' \in |mK_{X'}|$  をとり、 $f'$  に関して水平な成分と垂直な成分に分けて、 $D' = (D')^h + (D')^v$  と表す。 $\kappa(X'_y) = 0$  であるので、 $(D')^h$  は何倍しても動かない。

$M'$  を  $(f')^*M' \leq (D')^v$  が成り立つような因子のうちで最大のものとして定義する。 $f$  のファイバーは既約であるので、 $M'$  は整数係数の因子である。 $L' = M'/m - K_{Y'}$  とおけば、正值性定理から  $L'$  はネフな  $\mathbb{Q}$  因子である。

同様に  $L = M/m - K_Y$  とおけば、等式

$$g_Y^*L = (g^*M - M')/m + (K_{Y'} - g_Y^*K_Y) + L'$$

を得る。 $M = \sum m_j C_j, M' = \sum m'_l C'_l$  とおけば、構成から  $l \in J_j$  のとき

$$\begin{aligned} m_j &= \min\{d_i/b_{ij} \mid f(B_i) = C_j\} \\ m'_l &= \min\{d_i e_i + e_i - 1 \mid f(B_i) = C_j\} \end{aligned}$$

である。 $g^*L - L' = \sum c'_l C'_l$  とおくと、

$$(f_j - 1) - (e_j - 1)/m \leq c'_l \leq f_j - 1$$

を得る。 $l \in J_j$  のとき  $c_j = c'_l/f_j$ ,  $\bar{C} = \sum c_j C_j$  とおけば、 $(Y, \bar{C})$  は KLT になり、 $\bar{L} = L - \bar{C}$  はネフになる。 $M/m = K_Y + \bar{C} + \bar{L}$  である。

$M$  は  $Y$  上巨大であるので、豊富な  $\mathbb{Q}$  因子  $A$  と有効な  $\mathbb{Q}$  因子  $E$  によって  $M/m = A + E$  と書ける。十分小さな正の有理数  $\epsilon$  をとれば、 $(Y, \bar{C} + \epsilon E)$  は KLT であり、 $\bar{L} + \epsilon A$  は豊富である。十分一般で小さな係

数を持つ豊富因子  $A' \sim_{\mathbb{Q}} \bar{L} + \epsilon A$  をとれば、 $(Y, \bar{B} + \epsilon E + A')$  は KLT である。 $(1 + \epsilon)M/m \sim_{\mathbb{Q}} K_Y + \bar{C} + \epsilon E + A'$  であるので、一般型の多様体に関する有限生成定理から  $R(Y, M)$  の有限生成性が従う。  $\square$

もう少しがんばると次のように一般化できる：

定理 1.2. 射影的な KLT 組  $(X, \bar{B})$  において、 $\bar{B}$  が  $\mathbb{Q}$  因子であるならば、標準環

$$R(X, K_X + \bar{B}) = \bigoplus_{m=0}^{\infty} H^0(X, \mathcal{L}^m(K_X + \bar{B}))$$

は有限生成な次数付き環になる。

*Proof.* 前の定理の証明との変更点を述べる。十分大きくかつ割り切れる正の整数  $m$  をとって、 $D \in |m(K_X + \bar{B})|$  を固定する。 $Z = \text{Supp}(D + \bar{B})$  において、よく準備された代数的ファイバー空間に双有理モデルを取り替える。

$D$  を使って分岐被覆を構成する。 $\bar{B}$  の係数は整数ではないので、 $D$  の他に  $\bar{B}$  の台でも分岐する。 $f'$  の一般ファイバーに誘導された被覆  $X'_{y'} \rightarrow X_y$  は、 $D_h$  との交わりの他に  $\bar{B}$  との交わりでも分岐する。そのため、 $\kappa(X'_{y'})$  は 0 とは限らない。従って、ネフなベクトル束  $(f')_* \mathcal{O}_{X'}(K_{X'}/Y')$  の階数は 1 とは限らない。ところが、ガロア被覆  $X'_{y'} \rightarrow X_y$  のガロア群作用による不変部分をとれば、階数 1 の部分ベクトル束が得られる。これは直和因子であるので、やはりネフである。

$K_{X'} = g_X^*(K_X + \bar{B}) + \sum e_k B'_k$  とおけば、 $k \in I_i$  のときには  $0 \leq e_k \leq e_i - 1$  が成り立つ。 $D$  に対応する因子  $D' \in |mK_{X'}|$  をとり、 $f'$  に関する垂直成分  $(D')^v$  を使って  $M'$  を定義するということは、上記のように階数 1 の直和因子をとることに対応する。残りの証明は同じである。  $\square$